Capítulo 26. MODELOS DINAMICOS

Capítulo 25. MODELOS DINÁMICOS

Hacer bajada para series de tiempo Las pruebas de consistencia e independencia y las condiciones de identificación y la prueba de simultaneidad constituyen un conjunto de herramientas para validar la estructura lógica y el método de estimación del modelo.

El análisis estático comparativo y el análisis dinámico en los modelos multiecuacionales enriquecen el estudio econométrico al permitir conocer las interrelaciones entre las variables.

En este Capítulo se discuten los métodos de estimación y se introduce a las técnicas de simulación.

26.1 Introducción

Modelo es una representación abstracta de la realidad, realizado a través de elementos y relaciones entre elementos. En un modelo matemático, el elemento es la variable y las relaciones son las ecuaciones o funciones que expresan las relaciones del mundo real.

En el conjunto de modelos matemáticos disponibles, se pueden distinguir dos tipos que son útiles al análisis económico:

- Modelos Estáticos. Describe la situación en un momento de tiempo; es decir, la relación entre las variables ocurre en el mismo momento t. Es posible, a su vez, dividir estos modelos en dos tipos:
  - Análisis estático comparativo: se comparan dos situaciones de equilibrio.
  - Optimización estática: se establecen las condiciones para que el equilibrio sea óptimo.

- Modelos Dinámicos: estudia la trayectoria de las variables a través del tiempo, siendo la relación entre las variables en tiempos desfasados. Se tienen dos tipos de modelos:
  - Modelos deterministas: las trayectorias temporales se obtienen de acuerdo a la característica del tiempo considerado. Si el tiempo es continuo se trabaja con ecuaciones diferenciales; mientras que, si el tiempo es discreto se utilizan ecuaciones en diferencia.
  - Modelos estocásticos: Perez (2008) indica que pueden presentarse tres situaciones
    - Modelos dinámicos con retardo en las variables exógenas.

$$Y_t = \alpha \sum_{i=0}^{m} \beta_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Estos modelos, generalmente, presentan multicolinealidad.

    - Modelos dinámicos de rezagos distribuidos con retardo en la variable endógena

$$Y_t = \alpha \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

Estos modelos se estiman por mínimos cuadrados ordinarios, siempre que el término de error no tenga autocorrelación. El problema que suele presentarse es la correlación entre la variable explicativa y el término de error.

- Modelos dinámicos con retardos en variables endógenas y exógenas

$$Y_t = \alpha \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Y_{t-i} + \varepsilon_t \ \alpha \sum_{i=0}^{m} \beta_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Estos modelos suelen presentar multicolinealidad, autocorrelación y regresores estocásticos. Esto último por estar la variable endógena rezagada, lo que da lugar a variable explicativa no fija. El método de estimación de mínimos cuadrados suele no ser el indicado en este tipo de modelos, por lo que se reemplaza por el método de variables instrumentales.

26.2 Trayectoria temporal y equilibrio de largo plazo.

En los modelos dinámicos es posible indicar las condiciones para alcanzar el equilibrio intertemporal, tanto cuando se considere el tiempo continuo (ecuaciones diferenciales) como cuando se lo considere discreto (ecuaciones en diferencia). Las ecuaciones diferenciales, tanto como las ecuaciones en diferencia, pueden adoptar diferente orden dependiendo del orden más alto de la derivada que aparece en la ecuación diferencial o de la diferenciación mayor que aparece en la ecuación en diferencia[1].

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial de primer orden es del tipo

$$\frac{du}{dt} + u(t)y = w(t)$$

Si el coeficiente u(t) = a y el término w(t)= b , donde a y b son constantes, la solución general será:

$$Y_t = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$$

Donde Ae^{-at} representa la trayectoria temporal de la variable

$$\frac{b}{a}\ es\ la\ integral\ particular$$

Si a>0, Yt converge al equilibrio

Si el coeficiente u(t) y el término w(t) son variables, la solución general será:

$$Y(t) = e^{-\int u\,dt}\left(A + \int we^{\int u\,dt}dt\right)$$

Una ecuación diferencial de segundo orden es

---

[1] El análisis dinámico desde el punto de vista matemático se puede estudiar detalladamente a partir de Chiang (2006).

$$y^{''}(t) + a_1 y^{'}(t) + a_2 y(t) = b$$

Si a2 ≠ 0 y r1 ≠ r2, la solución general es:

$$Y_t = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \frac{b}{a_2}$$

Donde a $Y_t = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ se lo denomina solución complementaria -la que dará como resultado la trayectoria temporal de la variable- y $\frac{b}{a_2}$ es la integral particular –a partir de la cual se obtiene el nivel de equilibrio intertemporal.

Ecuaciones en diferencia

Una ecuación en diferencias es del tipo

$$y_{t+1} + a y_t = c$$

Siendo la solución general

$$Y_t = A(-a)^t + \frac{c}{1+a} \; con \; a \neq -1$$

Si $|a| < 1$ la trayectoria es convergente y, además, si $a > 0$ la trayectoria es oscilante.

Por ejemplo, si $a = -0.5$

$$t = 0 \rightarrow (-a)^t = 0.5^0 = 1$$

$$t = 1 \rightarrow (-a)^1 = 0.5^1 = 0.5$$

$$t = 2 \rightarrow (-a)^2 = 0.5^2 = 0.25$$

Por ejemplo, si $a = 0.5$

$$t = 0 \ \rightarrow (-a)^t = (-0.5)^0 = 1$$

$$t = 1 \ \rightarrow (-a)^1 = (-0.5)^1 = -0.5$$

$$t = 2 \ \rightarrow (-a)^2 = (-0.5)^2 = 0.25$$

Si a = -1, la solución general es

$$Y_t = A\,ct$$

Cuando t →∞, Y_t→∞ , por lo que la trayectoria es divergente.

Una ecuación en diferencia de segundo orden es

$$y_{t+2} + \ a_1 y_{t+1} + \ a_2 y_t = c$$

La solución particular es

$$Y_t^p = \frac{c}{1 + \ a_1 + \ a_2} \ si\ a_1 + \ a_2 \ \neq \ -1$$

Si $a_1 + a_2 = \ -1 \ \rightarrow \ Y_t^p = \frac{c}{a_1 + a_2} t, \ con\ a_2 \ \neq \ -2$

Si $a_1 + a_2 = \ -1 \ \ y\ a_2 = -2 \ \ Y_t^p = \frac{c}{2} t^2$

Solo el primer caso indicará, potencialmente, convergencia a un valor de equilibrio.

Para hallar la solución complementaria se debe trabajar con la parte homogénea de la ecuación, $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$, para encontrar las raíces que anulan el polinomio.

Indicando su similar $ax^2 + bx + c = 0$

Donde a = 1, b = a_1 y c = a_2 y haciendo

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtienen las raíces que anulan el polinomio, r_1 y r_2, la solución es

$ax^2 + bx + c = (1 - r_1)(1 - r_2) = 0$

Se pueden presentar tres casos

Raíces distintas: si $b^2 > 4ac\ Y_t^c = A_1 {r_1}^t + A_2 {r_2}^t$

Raíces iguales: si b2 $b^2 > 4ac\ Y_t^c = A_3 r^t + A_4 r^t t$

Raíces complejas: si $b^2 < 4ac\ Y_t^c = R^t\big(A_5 \cos(\theta t) + A_6\, sen\, (\theta t)\big)$

Donde $R = \sqrt{a_2}, \cos\theta = \frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}}\ y\ sen\,\theta \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4a_2}}$

La solución general de una ecuación en diferencia de segundo orden con raíces reales distintas es

$$Y_t = A_1 {b_1}^t + A_2 {b_2}^t + \frac{c}{1 + a_1 + a_2}$$

La convergencia a un valor de equilibrio está garantizada cuando

$$|b_1| < 1 \text{ y } b_1 > 0$$

Cuando se tienen raíces complejas, la convergencia se garantiza si R<1.

Para hallar los valores de A_1 y A_2, deben indicarse valores sucesivos a Yt en

t=0 y t=1

Si $t = 0 \rightarrow Y_0 = A_1 {b_1}^0 + A_2 {b_2}^0 + \frac{c}{1+a_1+a_2} \rightarrow Y_0 = A_1 + A_2 + \frac{c}{1+a_1+a_2}$

Si $t = 0 \rightarrow Y_1 = A_1 {b_1}^1 + A_2 {b_2}^1 + \frac{c}{1+a_1+a_2} \rightarrow Y_1 = A_1 b_1 + A_2 b_2 + \frac{c}{1+a_1+a_2}$

Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permiten hallar el valor de las constantes.

Todos estos modelos son determinísticos y presuponen que se conoce el valor de los coeficientes.

26.3 Características de los modelos econométricos dinámicos

La característica principal de los modelos econométricos dinámicos es tener una variable rezagada. Esto indica que la influencia de una variable explicativa (**X**) sobre la dependiente (**Y**) se efectiviza en un lapso de tiempo, siendo este lapso el que se denomina *rezago*.

Las razones por las cuales se producen rezagos obedecen a causas sicológicas (no se cambia de hábito de manera inmediata), tecnológicas (la incorporación de la nueva tecnología disponible se realiza a lo largo del tiempo) o institucionales (por ejemplo, una buena alternativa financiera puede aprovecharse hasta que existan fondos disponibles).

Se distinguen dos tipos:

Modelo de rezagos distribuidos: donde la variable a rezagar es una variable explicativa exógena.

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

Los rezagos distribuidos pueden ser finitos o infinitos, de acuerdo a que se conozca el número exacto de rezagos.

Modelos autorregresivos: donde la variable a rezagar es la variable dependiente

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (2)$$

En un modelo de rezagos distribuidos en el tiempo

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (3)$$

β_0 es el multiplicador o propensión que mide el impacto de corto plazo,

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots$ informan el impacto intermedio

$\sum \beta_i = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k$ indica el multiplicador de rezagos distribuidos de largo plazo o total

26.4. Estimación

A partir del modelo de rezagos distribuidos infinitos

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t \qquad (4)$$

Se pueden adoptar dos modalidades de estimación

1. estimación ad hoc
2. restricciones a priori sobre los β

Estimación ad hoc

Este enfoque lo adoptaron Alt (1942) y Tinbergen (1949). Ellos sugieren que la estimación se realice secuencialmente, lo cual significa hacer:

$$\begin{aligned} Y_t &= f(X) \\ Y_t &= f(X, X_{t-1}) \\ Y_t &= f(X, X_{t-1}, X_{t-2}) \\ &\vdots \\ &\textit{sucesivamente} \end{aligned}$$

El procedimiento se detiene cuando:

a) los coeficientes de la regresión comienzan a hacerse estadísticamente insignificantes, y/o

b) el coeficiente de por lo menos 1 variable cambia de signo

Las desventajas de este método radican en que

a) no está especificado qué tan largo es el rezago
b) a medida que se estiman rezagos sucesivos quedan menos grados de libertad
c) puede presentarse multicolinealidad

Restricciones a priori sobre los β

En estos modelos se supone que los coeficientes siguen un patrón sistemático de comportamiento, se estudiarán el enfoque de Koyck y el polinomio de Almon.

Enfoque de Koyck

Se parte de un modelo de rezagos infinitos como el expresado en (4), se supone que todos los coeficientes β tienen igual signo y que

$\beta_k = \beta_0 \lambda^k$ siendo $k = 0, 1, 2 \cdots$ y $0 < \lambda < 1$ (5)

λ es la tasa de descenso o caída del rezago distribuido

1-λ es la velocidad de ajuste

El enfoque de Koyck (1954) postula que:

a) cada coeficiente β sucesivo es inferior, lo que significa que con el paso del tiempo la influencia de la variable disminuye

b) $\lambda > 0$ con lo que elimina la posibilidad de que los coeficientes β cambien de signo

c) $\lambda < 1$ le da menos peso a los más alejados en el tiempo

d) la suma de los coeficientes β integrantes de un modelo indica el multiplicador de largo plazo finito

$$\sum \beta_k = \beta_0 \left(\frac{1}{1-\lambda} \right) \qquad (6)$$

Reemplazando (5) en (4), el modelo de rezagos infinitos puede escribirse como

Como resultado, el modelo de rezagos infinitos puede escribirse como

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_0 \lambda X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t \qquad (7)$$

La expresión (7) tiene parámetros no lineales, al rezagarlo un período se tiene:

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta_0 X_{t-1} + \beta_0 \lambda X_{t-2} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-3} + \cdots + \varepsilon_{t-1}$$

multiplicando por λ

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda \alpha + \lambda \beta_0 X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \beta_0 \lambda^3 X_{t-3} + \cdots + \lambda \varepsilon_{t-1} \qquad (8)$$

Restando (8) de (7) se obtiene:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 X_t + \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1} \qquad (9)$$

Reordenando

$$Y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + \nu_t \qquad (10)$$

donde ν_t es un promedio móvil de los errores.

Este procedimiento se conoce como transformación de Koyck.

Las diferencias entre el modelo expresado en (10), respecto del expresado en (4), radica en la cantidad de parámetros a estimar. Además, (10):

- no tiene multicolinealidad porque se reemplazó a las X_t por Y_{t-1}
- es un modelo autorregresivo derivado de un modelo de rezagos distribuidos
- es posible que presente correlación entre la explicativa y el término de error
- es posible la autocorrelación de errores por la construcción
- no puede usarse el estadístico Durbin-Watson habitual, sino la h de Durbin

Estadístico h de Durbin

En estos modelos donde la variable dependiente se encuentra explicada por sus propios rezagos, la autocorrelación se mide con el estadístico *h* de Durbin

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1-n(\operatorname{var}\hat{\alpha})}}$$

donde n tamaño de muestra

$\text{var}\,\hat{\alpha}$ varianza del coeficiente de la variable rezago

$\hat{\rho}$ estimación de ρ

$\hat{\rho}$ se aproxima a partir del estadístico Durbin Watson (d)

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{1}{2}d$$

h se distribuye $N(0,1)$ y la hipótesis nula es no existencia de autocorrelación.

Estructura de rezagos

A partir del valor de λ se pueden calcular la mediana de rezagos y el rezago medio. Estas son medidas que caracterizan la naturaleza de la estructura de rezagos.

$$\text{Mediana de rezagos} = -\frac{\log 2}{\log \lambda} \quad 0 < \lambda < 1 \qquad (11)$$

Indica el tiempo que se necesita para alcanzar el 50% del cambio total en Y

Con $\lambda = 0.2$ Mediana = 0.4306 menos de la mitad del periodo

Con $\lambda = 0.8$ Mediana = 3.1067 más de tres periodos

Con $\lambda = 1/2$ Mediana = 1 necesita 1 periodo

Si todos los β son positivos

Rezago medio $= \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ (12)

Si $\lambda = 1/2$ rezago promedio = 1

Esta medida indica el tiempo promedio necesario para que puedan observarse los cambios en las variables dependientes ocasionados por variaciones en las variables explicativas.

La mediana y la media de los rezagos sirven como medida resumen de la velocidad con la cual Y responde a X.

Del enfoque de Koyck se derivan:

1. Modelo de expectativas adaptativas
2. Modelo de ajustes de existencias

El Modelo de Expectativas Adaptativas

El modelo de Koyck se obtiene por un proceso puramente algebraico pero está desprovisto de cualquier soporte teórico. Esto puede suplirse si se supone el siguiente modelo

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t \qquad (13)$$

Donde Y es la demanda de dinero

X^* la tasa de interés esperada a largo plazo

ε el término de error

La variable expectativa no es directamente observable pero se puede proponer la siguiente hipótesis:

$$X_t^* - X_{t-1}^* = \gamma\left(X_t - X_{t-1}^*\right) \qquad (14)$$

Con $0 < \gamma \leq 1$ denominado coeficiente de expectativas. (14) es conocido como hipótesis de expectativas adaptativas, expectativas progresivas o de aprendizaje por error popularizadas por Cagan (1956) y Friedman (1957).

Esta hipótesis establece que las expectativas son corregidas cada periodo por una fracción γ de la brecha entre el valor actual y el esperado de la variable.

Otra manera de plantear la hipótesis es sumar en ambos miembros X_{t-1}^* y sacar factor común γ

$$X_t^* = \gamma X_t + (1-\gamma) X_{t-1}^* \qquad (15)$$

Lo que muestra que el valor esperado de la tasa de interés en el tiempo *t* es un promedio ponderado del valor actual de la tasa de interés en el tiempo y su valor esperado en el periodo anterior, con ponderaciones de γ y $(1-\gamma)$

Si $\gamma = 1$ $\quad X_t^* = X_t$, las expectativas se cumplen inmediatamente

Si $\gamma = 0$ $\quad X_t^* = X_{t-1}^*$, hay expectativas estáticas, las condiciones prevalecen a lo largo del tiempo

Sustituyendo (15) en (13)

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 \left[\gamma X_t + (1-\gamma) X^*_{t-1}\right] + \varepsilon_t \\ &= \beta_0 + \beta_1 \gamma \ X_t + \beta_1 (1-\gamma) \ X^*_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \qquad (16)$$

Si se rezaga (13) un periodo

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X^*_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \qquad (17)$$

Se lo multiplica por $(1-\gamma)$

$$(1-\gamma) Y_{t-1} = (1-\gamma)\beta_0 + (1-\gamma)\beta_1 X^*_{t-1} + (1-\gamma)\varepsilon_{t-1} \qquad (18)$$

Restando (18) a (16)

$$\begin{aligned} Y_t - (1-\gamma) Y_{t-1} = \beta_0 - (1-\gamma)\beta_0 + \beta_1 \gamma X_t + (1-\gamma)\beta_1 X^*_{t-1} - \beta_1 (1-\gamma) X^*_{t-1} + \\ + \varepsilon_t - (1-\gamma)\varepsilon_{t-1} \end{aligned}$$

$$Y_t = \beta_0 \gamma + \beta_1 \gamma X_t + (1-\gamma) \ Y_{t-1} + \nu_t \qquad (19)$$

Donde $\nu_t = \varepsilon_t - (1-\gamma)\varepsilon_{t-1}$

Entre los modelos expresados en (13) y (19) se observan las siguientes diferencias:

- en (13), β_1 mide el cambio en Y ante cambios en el largo plazo
- en (19), $\beta_1 \gamma$ mide el cambio promedio de Y ante cambios unitarios en el valor actual u observado de X
- si $\gamma = 1$, los valores actuales y de largo plazo son iguales
- en (19), β_1 se obtiene luego de conocer γ

El modelo de expectativas adaptativas –expresado en (19)-, y el modelo de Koyck –expresión (10)-, son similares; ambos son autorregresivos y tienen igual término de error.

La hipótesis de expectativas adaptativas fue muy popular hasta la llegada de las expectativas racionales difundidas por Lucas y Sargent; éstas suponen que los agentes económicos individuales utilizan información actual disponible y relevante en la formación de sus expectativas y no se apoyan únicamente en experiencia pasada.

Modelo de ajuste de existencia o modelo de ajuste parcial

Esta es otra racionalización del modelo de Koyck dada por Marc Nerlove. Partiendo del modelo de acelerador flexible de la teoría económica, se supone que hay un nivel de existencias de capital de equilibrio -u óptimo deseado o de largo plazo- requerido para generar una producción determinada bajo unas condiciones dadas de tecnología y tasa de interés, entre otras.

Si el nivel de capital deseado Y^* es función lineal de la producción X

$$Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \qquad (20)$$

Y dado que el capital deseado no es observable, Nerlove postula la siguiente hipótesis

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta\left(Y_t^* - Y_{t-1}\right) \qquad (21)$$

Es decir, los cambios en las existencias de capital vienen dados por una proporción δ de las diferencias entre lo deseado hoy y lo existente el periodo anterior.

(21) es la hipótesis de ajuste parcial o de ajuste de existencias, donde:

Que es la hipótesis de ajuste parcial o de ajuste de existencias, donde:

$0 < \delta \leq 1$ es el coeficiente de ajuste

$Y_t^* - Y_{t-1}$ es el cambio deseado

$Y_t - Y_{t-1}$ es el cambio observado que es la Inversión

La expresión (21) puede escribirse como

$$I = \delta\left(Y_t^* - Y_{t-1}\right)$$

O bien, eliminando paréntesis, como

$$Y_t = \delta Y_t^* + Y_{t-1} - \delta Y_{t-1} \qquad (22)$$

$$Y_t = \delta Y_t^* + (1 - \delta) Y_{t-1} \qquad (23)$$

Sustituyendo (20) en (23)

$$Y_t = \delta(\beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t) + (1 - \delta) Y_{t-1}$$

$$Y_t = \delta\beta_0 + \delta\beta_1 X_t + \delta\varepsilon_t + (1 - \delta) Y_{t-1}$$

$$Y_t = \delta\beta_0 + \delta\beta_1 X_t + (1 - \delta) Y_{t-1} + \delta\varepsilon_t \qquad (24)$$

(24) se denomina modelo de ajuste parcial y puede considerarse demanda de existencias de capital de corto plazo

Una vez que se estima (24) es posible, a partir del término δ, conocer el nivel de existencia de capital de largo plazo (ecuación 20). Se dividen los los coeficientes $\delta\beta_0$ y $\delta\beta_1$, y eliminando el término rezagado de Y, se obtiene la función de largo plazo.

En resumen, se tienen tres modelos:

Koyck $$Y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + (\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}) \quad (25)$$

Expectativas adaptativas

$$Y_t = \beta_0\gamma + \beta_1\gamma X_t + (1-\gamma) Y_{t-1} + [\varepsilon_t - (1-\gamma)\varepsilon_{t-1}] \quad (26)$$

Ajuste parcial $$Y_t = \delta\beta_0 + \delta\beta_1 X_t + (1-\delta) Y_{t-1} + \delta\varepsilon_t \quad (27)$$

Estos modelos tienen:

- Ordenada al origen
- Una variable explicativa exógena X
- Variable explicativa rezagada (Y_{t-1}) que es estocástica y que da lugar al modelo autorregresivo.
- Correlación serial (entre Y_{t-1} y X)

Por esto existe la posibilidad de que no puedan estimarse por mínimos cuadrados ordinarios. Los modelos expresados en (25) y (26) tendrán errores autocorrelacionados por la propia construcción. En la expresión (27) pueden existir errores homocedásticos y no autocorrelacionados, en cuyo caso es posible usar mínimos cuadrados ordinarios aun cuando las estimaciones sean sesgadas.

Método de variables instrumentales

Este método sugerido por Leviatán (1963) constituye una alternativa de estimación cuando no puede aplicarse mínimos cuadrados ordinarios y consiste en encontrar una variable altamente correlacionada con Y_{t-1} pero no con ν_t (término de error del modelo de Koyck o el de expectativas adaptativas).

La variable sugerida es X_{t-1} que no está relacionada con los errores lo cual genera estimaciones consistentes pero puede haber multicolinealidad lo cual dará lugar a estimadores ineficientes.

Contraste de Hausman

Para saber si un regresor es estocástico se utiliza el contraste de exogeneidad de Hausman. Se parte de un modelo con una sola variable explicativa, cuyo carácter estocástico estamos estudiando

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon_t$$

1. Se estima el modelo por mínimos cuadrados y se obtienen los residuos e
2. Se especifica y estima $Yt = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 e_t + \mu t$
3. Se formula la hipótesis $H0 : \beta 2 = 0$, que es equivalente a decir: el regresor es no estocástico o el regresor es exógeno

Si se rechaza la hipótesis nula, el regresor no es variable exógena sino que está correlacionado con los residuos.

Modelos con retardos distribuidos finitos.

Aquí se verán tres modelos:

- Modelo de rezago distribuido de Almon
- Modelo aritmético de Fischer
- Retardo en v invertida de De Leeuw

Modelo de rezagos distribuidos de Almon

El modelo de Koyck supone que los β se reducen geométricamente a medida que el rezago aumenta, esto no es aplicable cuando tenemos situaciones como las planteadas en las Figuras 1 a 3.

Shirley Almon (1965) propuso estimar (K +1) β por medio de una función polinómica. Usando el teorema de Weierstrass[2], consideró que los coeficientes de los rezagos β_i podían ajustarse a un polinomio en i de grado q:

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \cdots + a_m i^m \qquad (28)$$

---

2 Weierstrass demostró que "toda función continua en un intervalo cerrado puede ser aproximada a través de un polinomio de grado adecuado tal que difiera de la función en menos de cualquier cantidad positiva dada en todo punto del intervalo".

La Figura 1 se corresponde con coeficientes que se ajustan por un polinomio de grado 2; la Figura 2 con un polinomio de grado 3 y la Figura 3 con un polinomio de grado 4. En general, un polinomio de grado 2 o grado 3, ajusta bien el comportamiento de los β_i.

Figura 1

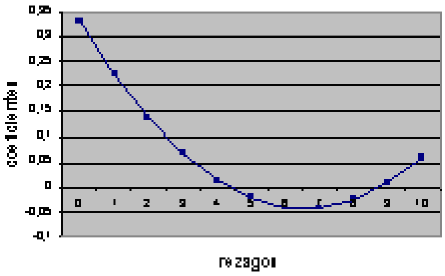


Figura 2

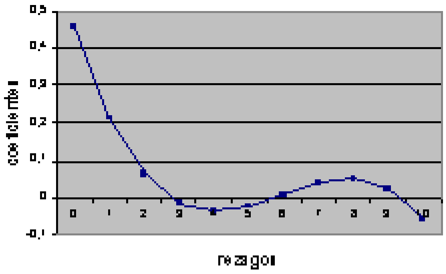
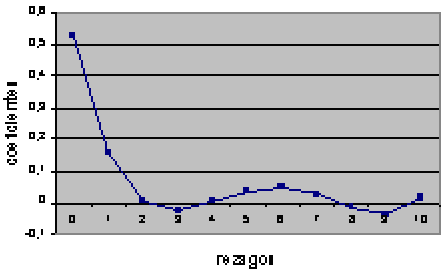


Figura 3



La técnica de Almon parte de un modelo finito de rezagos distribuidos

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (29)$$

expresión que puede escribirse como

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{k} \beta_i X_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (30)$$

A efectos de simplificar la notación se supone que los coeficientes β_i se ajustan por un polinomio de segundo grado

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 \qquad (31)$$

Reemplazando (31) en (30)

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha + \sum_{i=0}^{k} \left(a_0 + a_1 i + a_2 i^2 \right) X_{t-i} + \varepsilon_t \\ &= \alpha + a_0 \sum_{i=0}^{k} X_{t-i} + a_1 \sum_{i=0}^{k} i \; X_{t-i} + a_2 \sum_{i=0}^{k} i^2 \; X_{t-i} + \varepsilon_t \end{aligned} \qquad (32)$$

Definiendo las variables instrumentales

$$\begin{aligned} Z_{0t} &= X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \cdots + X_{t-k} = \sum_{i=0}^{k} X_{t-i} \\ Z_{1t} &= 1X_{t-1} + 2X_{t-2} + \cdots + kX_{t-k} = \sum_{i=0}^{k} iX_{t-i} \\ Z_{2t} &= 1^2 X_{t-1} + 2^2 X_{t-2} + \cdots + k^2 X_{t-k} = \sum_{i=0}^{k} i^2 X_{t-i} \end{aligned} \qquad (33)$$

y reemplazado en (32)

$$Y_t = \alpha + a_0 Z_{0t} + a_1 Z_{1t} + a_2 Z_{2t} + \varepsilon_t \qquad (34)$$

Este modelo se estima por MCO, si los errores son homocedásticos y no autocorrelacionados α y a_m tendrán las propiedades estadísticas deseables.

Las variables explicativas no están correlacionadas con el término de error pero sí puede haber alta correlación entre ellas por la manera en que fueron construidas. Si ocurriera este caso se debería eliminar la multicolinealidad a través de ACP.

Ahora bien, se ha llegado al final del modelo pero se está a mitad camino de lo que realmente se quiere conocer. El objetivo son los coeficientes de la variables explicativa rezagada y, lo que se tiene, son los coeficientes de variables que en su interior tienen una combinación de variables con rezagos.

El procedimiento es el siguiente

1. Estimar (34) obteniendo $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{a}_0 Z_{0t} + \hat{a}_1 Z_{1t} + \hat{a}_2 Z_{2t}$
2. Haciendo uso del supuesto inicial dado en (31) donde:

   $\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$

Se calculan los coeficientes β_i:

$$
\begin{aligned}
&\text{Si } i=0,\ \hat{\beta}_0 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 0 + \hat{a}_2 0^2 \\
&\text{Si } i=1,\ \hat{\beta}_1 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 1 + \hat{a}_2 1^2 \\
&\text{Si } i=2,\ \hat{\beta}_2 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 2 + \hat{a}_2 2^2 \qquad\qquad (35) \\
&\quad\vdots \\
&\text{Si } i=k,\ \hat{\beta}_k = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 k + \hat{a}_2 k^2
\end{aligned}
$$

¿Cuál es el desvío de los β_i? También se debe calcular, a partir de los desvío de a_m

$$Var(\hat{\beta}_i) = Var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 i + \hat{a}_2 i^2) = \sum_{j=0}^{m} i^{2j}\,\mathrm{var}(\hat{a}_j) + 2\sum_{j<p} i^{j+p}\,\mathrm{cov}(\hat{a}_j \hat{a}_p) \qquad (36)$$

Entonces:

$$i = 0 \rightarrow Var(\hat{\beta}_0) = Var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 0 + \hat{a}_2 0^2) =$$

$$i = 1 \rightarrow Var(\hat{\beta}_1) = Var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 1 + \hat{a}_2 1^2) = 1^{2*0} var(\hat{a}_0) + 1^{2*1} var(\hat{a}_1) + 1^{2*2} var(\hat{a}_2) + 2\left(1^{0+1} cov(\hat{a}_0 \hat{a}_1) + 1^{0+2} cov(\hat{a}_0 \hat{a}_2) + 1^{1+2} cov(\hat{a}_1 \hat{a}_2)\right)$$

$$i = 2 \rightarrow Var(\hat{\beta}_2) = Var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 2 + \hat{a}_2 2^2) = 2^{2*0} var(\hat{a}_0) + 2^{2*1} var(\hat{a}_1) + 2^{2*2} var(\hat{a}_2) + 2\left(2^{0+1} cov(\hat{a}_0 \hat{a}_1) + 2^{0+2} cov(\hat{a}_0 \hat{a}_2) + 2^{1+2} cov(\hat{a}_1 \hat{a}_2)\right)$$

$$i = 3 \rightarrow Var(\hat{\beta}_3) = Var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 3 + \hat{a}_2 3^2) = 3^{2*0} var(\hat{a}_0) + 3^{2*1} var(\hat{a}_1) + 3^{2*2} var(\hat{a}_2) + 2\left(3^{0+1} cov(\hat{a}_0 \hat{a}_1) + 3^{0+2} cov(\hat{a}_0 \hat{a}_2) + 3^{1+2} cov(\hat{a}_1 \hat{a}_2)\right)$$

$$\vdots$$

$$i = k \rightarrow Var(\hat{\beta}_k) = Var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 k + \hat{a}_2 k^2) = k^{2*0} var(\hat{a}_0) + k^{2*1} var(\hat{a}_1) + k^{2*2} var(\hat{a}_2) + 2\left(k^{0+1} cov(\hat{a}_0 \hat{a}_1) + k^{0+2} cov(\hat{a}_0 \hat{a}_2) + k^{1+2} cov(\hat{a}_1 \hat{a}_2)\right)$$

¿Qué problemas se plantean con este método?

Un problema que presenta la estimación de estos modelos es la reducción de los grados de libertad, tener un número importante de rezagos conduce a estimar un alto número de coeficientes que redunda en disminuir los grados de libertad. Además es posible que exista relación entre las variables explicativas.

La elección del grado del polinomio y de los términos de rezago es subjetivo.

Para determinar la cantidad de rezagos se puede utilizar un correlograma o el test de causalidad de Granger, pero con el grado del polinomio es prueba y error.

El procedimiento es estimar sucesivos modelos con distinto polinomio y, el que mejor modelo estimado arroje, ese será el polinomio a adoptar finalmente. La elección del modelo final puede hacerse a través de los criterios de información de Akaike o Schwarz, cuanto menor sean estos indicadores mejor modelo.

El método es flexible para incorporar diversas estructuras, no se encuentra la variable dependiente rezagada y, si se puede ajustar un polinomio de grado bajo, se reduce el número de coeficientes a estimar.

El modelo de Almon en notación matricial

Y = **j**ɑ + **Xβ** + **ε**

Tx1 Tx1 Tx1 Tx1

Siendo

Vector de variables endógena: $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix}$ $J = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

Vector de coeficientes: $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$ vector aleatorio: $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$

Matriz de regresores $X = \begin{bmatrix} X_{t,1} & X_{t-1,1} & X_{t-2,1} & \cdots & X_{t-k,1} \\ X_{t,2} & X_{t-1,2} & X_{t-2,2} & \cdots & X_{t-k,2} \\ X_{t,3} & X_{t-1,3} & X_{t-2,3} & \cdots & X_{t-k,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{t,T} & X_{t-1,T} & X_{t-2,T} & \cdots & X_{t-k,T} \end{bmatrix}$

Escalar o parámetro independiente α

La función polinómica que plantea Almon en términos generales, es

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \ldots + a_q i^q$$

Los coeficientes β_i se pueden reescribir en términos de a de la siguiente manera:

$i = 0, \quad \beta_0 = a_0$

$i = 1, \quad \beta_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_q$

$i = 2, \quad \beta_2 = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + \ldots + a_q 2^q$

$i = 3, \quad \beta_3 = a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + a_3 3^3 + \ldots + a_q 3^q$

$\vdots$

$i = k, \quad \beta_k = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + \ldots + a_q k^q$

Se define una matriz auxiliar **H** que permite reescribir los (K+1) β en función de los (q+1)a, esto es

β = Ha

es decir

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k & k^2 & \cdots & k^q \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{bmatrix}$$

(k+1)xk (k+1)x(q+1) (q+1)x1

Volviendo los β por el polinomio

$$Y_t = a + \sum_{i=0}^{k} \left(a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \dots + a_q i^q\right) X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Desarrollando se obtiene

$$Y_t = a + a_0 \sum_{i=0}^{k} X_{t-i} + \sum_{i=0}^{k} a_1\, i X_{t-i} + \sum_{i=0}^{k} a_2 i^2 X_{t-i} + \dots + \sum_{i=0}^{k} a_q i^q X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Y_t = \alpha + a_0(X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + X_{t-k}) \\ + a_1(X_{t-1} + 2X_{t-2} + 3X_{t-3} + \dots + kX_{t-k}) \\ + a_2(X_{t-1} + 2^2 X_{t-2} + 3^2 X_{t-3} + \dots + k^2 X_{t-k}) + \cdots \\ + a_q(X_{t-1} + 2^q X_{t-2} + 3^q X_{t-3} + \dots + k^q X_{t-k}) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Usando variables instrumentales Z para la combinación lineal de las X, se puede reescribir como

$$Y_t = \alpha + a_0 Z_{0t} + a_1 Z_{1t} + a_2 Z_{2t} + \cdots + a_q Z_{qt} + \varepsilon_t$$

O en notación matricial

Y = jα + Za + ε

Tx1 Tx1 Tx1 Tx1

Además, como **Z=XH** se puede escribir

Y = jα + XHa + ε

Tx1 Tx1 Tx1 Tx1

Este modelo puede ser estimado por mínimos cuadrados ordinarios o por mínimos cuadrados generalizados (si los errores están autocorrelacionados y /o son heterocedásticos) haciendo la regresión de **Y** sobre $[\boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{XH}]$

De esta forma obtendríamos los (q+1)a que posibilitarán hallar los (k+1)β, haciendo uso de la matriz auxiliar **H**, esto es

$$\hat{\beta} = H\hat{a}$$

La regresión de los coeficientes estimados

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = [(j\,XH)'\,(j\,XH)]^{-1}\,[j\,XH']\,Y$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j'j & J'XH \\ H'X'J & H'X'XH \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} jY \\ H'X'Y \end{bmatrix}$$

Con

$$\hat{V}\begin{bmatrix} \hat{\propto} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = S^2 \begin{pmatrix} j'j & j'XH \\ H'XJ & H'X'XH \end{pmatrix}^{-1}$$

Por lo que

$$\hat{V}\,(\hat{a}) = s^2 \left[H'X'XH - \frac{1}{T}H'X'JJ'XH\right]^{-1}$$

De esta forma

$$\hat{\beta} = H\hat{a}$$

$$E(\hat{\beta}) = H\,E(\hat{a}) = Ha = \beta$$

$$\widehat{V}(\hat{\beta}) = s^2 H\,\widehat{V}(\hat{a})H' = s^2 H\left[H'X'XH - \frac{1}{T}H'X'JJXH\right]^{-1} H'$$

Estos modelos, además de la multicolinealidad, tienen el problema adicional de la determinación de:

Cantidad de rezagos a utilizar que, a su vez, puede afectar a los grados de libertad del modelo; esto es longitud del retardo (k)

Grado del polinomio (q)

Una forma de solucionar estos problemas es la contrastación de la hipótesis nula de restricciones lineales sobre **a**:

H_0 : $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_q = 0$

A través del estadístico

$$F^* = \frac{\left[(R\,\hat{R})'\left[R\,(Z'Z)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{a})\right]/\,1}{e\acute{e}\,/\,(T-q-2)} \approx F \propto 0,1,T-q-2$$

Donde

$$R\hat{a} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

Si F* › F a_0; 1; T-q-2 se rechaza la hipótesis nula y tanto los rezagos como el grado del polinomio son adecuados; caso contrario hay que volver a hacer la regresión con un grado menor t.

Retardo aritmético de Fischer

Dado $Y_t = \propto \; + \sum_{i=0}^{k} \delta_i \, X_{t-i} + \; \varepsilon_t$

$$\delta_i = \begin{cases} (k+1-i)\delta & 0 \le i \le k \\ 0 & i > s \end{cases}$$

Reemplazando en el modelo

$$Y_t = \propto + \sum_{i=0}^{k} (1-i) X_{t-i} + \; \varepsilon_t$$

El modelo a estimar es

$$Y_t = \propto \; + \delta \, Z_t + \; \varepsilon_t$$

Retardo en v invertida de De Leeuw

Dado $Y_t = \propto \; + \sum_{i=0}^{k} \delta_i X_{t-i} + \; \varepsilon_t$

$$\delta_i = \begin{cases} i\delta & 0 \le i \le k/2 \\ (k-i)\delta & \frac{k}{2} + \; 1 \le i \le k \end{cases}$$

Reemplazando en el modelo

$$Y_t = \propto + \delta \sum_{i=0}^{k/2} i \, X_{t-i} + \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k/2} (k-1) X_{t-i} \varepsilon_t$$

El modelo a estimar es

$Y_t = \propto \; + \delta \, Z_t + \; \varepsilon_t$

CASOS DE ESTUDIO, PREGUNTAS Y PROBLEMAS

Caso 26.1: Modelo de Rezagos Distribuidos de Almon para la función Consumo

El objetivo es aplicar la técnica de Almon a los datos de Consumo y PBI de Argentina utilizando la información existente en la Tabla 12.4.

Uno de los problemas que se presenta es el desconocimiento de la relación de causalidad, ¿el comportamiento del consumo causa un comportamiento determinado en el PBI?, o ¿las variaciones en el PBI dan lugar a cambios en el consumo?

Para aproximar una respuesta a esos interrogantes es de utilidad el Test de Granger, que mide la causalidad cuando hay relación temporal del tipo adelanto rezago entre las variables.

Prueba de Granger

La prueba involucra la estimación de dos regresiones

$$Y_t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j Y_{t-j} + \varepsilon_{1t}$$

$$X_t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{m} \delta_j Y_{t-j} + \varepsilon_{2t}$$

donde se supone que ε_{1t} y ε_{2t} no están correlacionados.

Los pasos consisten en

1. regresar Y sobre los rezagos de Y para obtener la suma de los cuadrados de los residuos restringidos (SCR_r)
2. repetir la regresión anterior pero incorporando los términos rezagados de X para obtener la suma del cuadrado de los residuos sin restringir (SCR_{nr})
3. se construye el estadístico

$$F = \frac{(SCR_r - SCR_{nr})/m}{SCR_{nr}/(n-k)}$$

que se distribuye como una $F_{m,n-k}$; donde:

m es el número de términos rezagados de X

k es el número de parámetros estimados en la regresión no restringida

4. Bajo la hipótesis nula de que el término rezagado de X no pertenece a la regresión

$$H_0 : \sum \alpha_i = 0$$

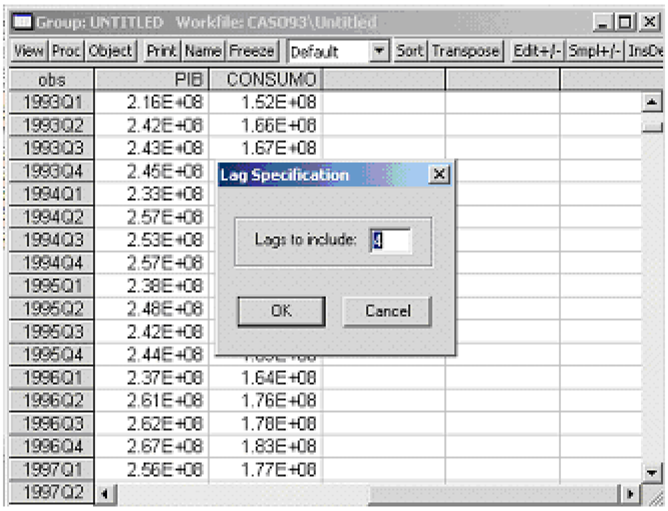
si el valor de F calculado excede al crítico, a un nivel de significación de α, se rechaza la H_0. Esto significa que los términos rezagados de X pertenecen a la regresión.

5. Se repiten los pasos anteriores para la variable X

Granger distingue 4 casos de causalidad

1. Unidireccional de X a Y: cuando los α_i son estadísticamente distintos de cero y los δ_i estadísticamente iguales a cero
2. Unidireccional de Y a X: cuando los α_i son estadísticamente iguales a cero y los δ_i estadísticamente distintos de cero
3. Retroalimentación o causalidad bilateral: cuando los α_i, β_i, λ_i y δ_i son estadísticamente distintos de cero.
4. Independencia: cuando el conjunto de coeficientes no es significativo.

Para aplicar el test se debe, en Eviews, abrir un grupo para las variables PIB y Consumo; luego en *View-Granger Casuality* se debe ingresar el número de rezagos a considerar (*Lags to include)*:

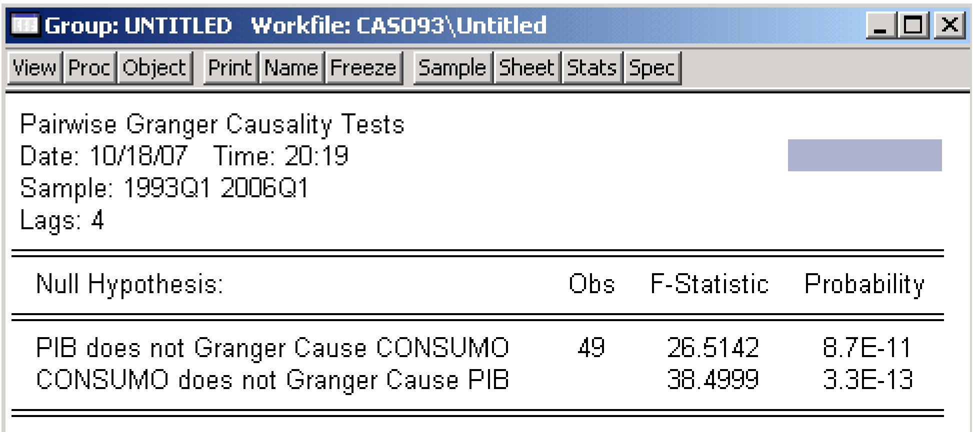


La salida del test muestra la prueba de causalidad de PBI a Consumo y de Consumo a PIB. La hipótesis nula es que los coeficientes que acompañan a los términos rezagados de la variable explicativa se anulan.

En la primera línea del test cuando dice "PBI does not Granger Cause CONSUMO" quiere decir que el comportamiento del PBI no afecta las variaciones de Consumo, por ende los coeficientes asociados a la variable explicativa PBI se anulan. Esta es la hipótesis nula, la cual es rechazada.

En la segunda línea se prueba la relación inversa bajo la hipótesis nula de que las variaciones en Consumo no determinan el nivel asumido por el PBI, por ende los coeficientes que acompañan a la variable explicativa Consumo se anulan. Esta hipótesis, al igual que la primera, se rechaza.

El resultado del test indica la presencia de retroalimentación o causalidad bilateral entre las dos variables.



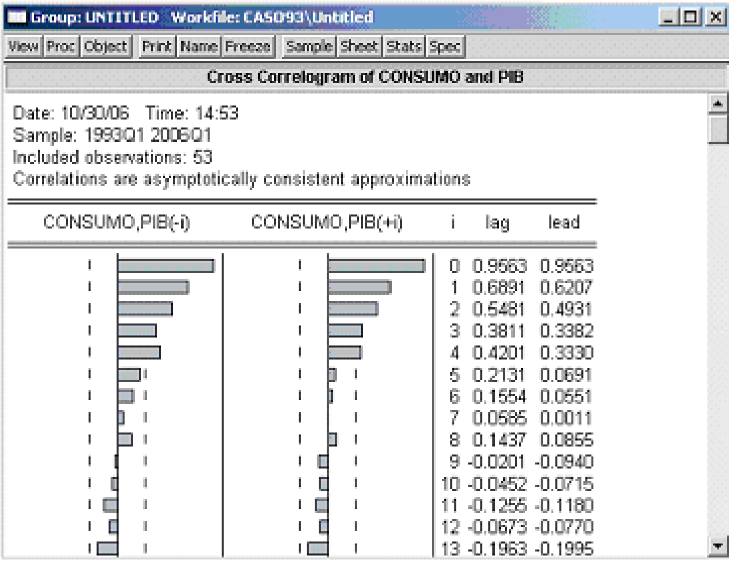
Group: UNTITLED Workfile: CASO93\Untitled

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Sample | Sheet | Stats | Spec

Pairwise Granger Causality Tests
Date: 10/18/07 Time: 20:19
Sample: 1993Q1 2006Q1
Lags: 4

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
PIB does not Granger Cause CONSUMO	49	26.5142	8.7E-11
CONSUMO does not Granger Cause PIB		38.4999	3.3E-13

También puede observarse el correlograma cruzado de las dos variables (*Cross Correlogram of CONSUMO and PIB*) que se obtiene abriendo un grupo para Consumo y PIB, haciendo en *View-Cross correlation*. En la gráfica, las barras que salen de las bandas de confianza alcanzan al cuarto rezago.



Group: UNTITLED Workfile: CASO93\Untitled

View Proc Object Print Name Freeze Sample Sheet Stats Spec

Cross Correlogram of CONSUMO and PIB

Date: 10/30/06 Time: 14:53
Sample: 1993Q1 2006Q1
Included observations: 53
Correlations are asymptotically consistent approximations

CONSUMO,PIB(-i)	CONSUMO,PIB(+i)	i	lag	lead
		0	0.9563	0.9563
		1	0.6891	0.6207
		2	0.5481	0.4931
		3	0.3811	0.3382
		4	0.4201	0.3330
		5	0.2131	0.0691
		6	0.1554	0.0551
		7	0.0585	0.0011
		8	0.1437	0.0855
		9	-0.0201	-0.0940
		10	-0.0452	-0.0715
		11	-0.1255	-0.1180
		12	-0.0673	-0.0770
		13	-0.1963	-0.1995

Estos resultados, la Prueba de Ganger con 4 rezagos y el correlograma, sugieren que el modelo a considerar es:

$$Consumo_t = \alpha + \beta_0 PIB_t + \beta_1 PIB_{t-1} + \beta_2 PIB_{t-2} + \beta_3 PIB_{t-3} + \beta_4 PIB_{t-4} + \mu_t$$

Se supone que los β_i pueden aproximarse por un polinomio de segundo grado

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$$

Estimación del Modelo de rezagos distribuidos de Almon

El modelo a estimar por variables instrumentales es:

$$Consumo_t = \alpha + a_0 Z_{0t} + a_1 Z_{1t} + a_2 Z_{2t} + \mu_t$$

En Eviews deben construirse las variables Z

$$Z_{0t} = \sum_{i=0}^{4} X_{t-i} = X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3} + X_{t-4}$$

$$Z_{1t} = \sum_{i=0}^{4} iX_{t-i} = X_{t-1} + 2X_{t-2} + 3X_{t-3} + 4X_{t-4}$$

$$Z_{2t} = \sum_{i=0}^{4} i^2 X_{t-i} = X_{t-1} + 2^2 X_{t-2} + 3^2 X_{t-3} + 4^2 X_{t-4}$$

a partir del comando *Genr* se construyen las variables

Z0=pib+pib(-1)+pib(-2)+pib(-3)+pib(-4)

*Z1=pib(-1)+2*pib(-2)+3*pib(-3)+4*pib(-4)*

*Z2=pib(-1)+2*2*pib(-2)+3*3*pib(-3)+4*4*pib(-4)*

La estimación en Eviews se realiza desde *Quick-Estimate Equation* consignado en el cuadro de diálogo la expresión

consumo c Z0 Z1 Z2

Los coeficientes corresponden a α, a_0, a_1, a_2; para hallar el valor de $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ debe utilizarse la expresión

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$$

$$i = 0 \rightarrow \beta_0 = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 \rightarrow \hat{\beta}_0 = \hat{a}_0 = 0.464424$$

$$i = 1 \rightarrow \beta_1 = a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 \rightarrow \hat{\beta}_1 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 = 0.464424 - 0.347033 + 0.061411$$
$$= 0{,}1788$$

$$i = 2 \rightarrow \beta_2 = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 \rightarrow \hat{\beta}_2 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 2 + \hat{a}_2 4 =$$
$$= 0.464424 - 0.347033 * 2 + 0.061411 * 4$$
$$= 0{,}016$$

$$i = 3 \rightarrow \beta_3 = a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 \rightarrow \hat{\beta}_3 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 3 + \hat{a}_2 9$$
$$= 0.464424 - 0.347033 * 3 + 0.061411 * 9$$
$$= -0{,}02397$$

$$i = 4 \rightarrow \beta_4 = a_0 + a_1 4 + a_2 4^2 \rightarrow \hat{\beta}_4 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 4 + \hat{a}_2 16$$
$$= 0.464424 - 0.347033 * 4 + 0.061411 * 16$$
$$= 0{,}05887$$

Equation: EQ02 Workfile: CASO93\Untitled

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: CONSUMO
Method: Least Squares
Date: 11/02/06 Time: 13:12
Sample (adjusted): 1994Q1 2006Q1
Included observations: 49 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-3686572.	8807312.	-0.418581	0.6775
Z0	0.464424	0.034466	13.47483	0.0000
Z1	-0.347033	0.047762	-7.265899	0.0000
Z2	0.061411	0.011505	5.337851	0.0000

R-squared	0.928452	Mean dependent var	1.82E+08
Adjusted R-squared	0.923682	S.D. dependent var	15281996
S.E. of regression	4221755.	Akaike info criterion	33.42751
Sum squared resid	8.02E+14	Schwarz criterion	33.58194
Log likelihood	-814.9739	F-statistic	194.6497
Durbin-Watson stat	0.286411	Prob(F-statistic)	0.000000

Reconstruyendo la ecuación consumo

$$Consumo_t = -3686572 + 0.46442 PIB_t + 0.17880 PIB_{t-1} + 0.01600 PIB_{t-2}$$
$$- 0.02397 PIB_{t-3} + 0.05887 PIB_{t-4}$$

Los errores estándar de los estimadores s_{β} se calculan haciendo

$$Var(\hat{\beta}_i) = var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 i + \hat{a}_2 i^2 + \cdots + \hat{a}_m i^m) = \sum_{j=0}^{m} i^{2j}\, var(\hat{a}_j) + 2\sum_{j<p} i^{j+p}\, cov(\hat{a}_j \hat{a}_p)$$

A partir de la información contenida en la matriz de covarianzas de los coeficientes *a*

Equation: EQ02 Workfile: CASO93\Untitled

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Coefficient Covariance Matrix

	C	Z0	Z1	Z2
C	7.76E+13	-36624.46	2287.134	-4388.324
Z0	-36624.46	0.001188	-0.001386	0.000268
Z1	2287.134	-0.001386	0.002281	-0.000529
Z2	-4388.324	0.000268	-0.000529	0.000132

Y teniendo en cuenta que $\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$, el cálculo de los desvíos será

$$i = 0 \rightarrow Var(\hat{\beta}_0) = var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 0 + \hat{a}_2 0^2) = var(\hat{a}_0) = 0{,}001188$$

$$s_{\hat{\beta}_0} = s_{\hat{a}_0} = \sqrt{0{,}001188} = 0{,}03446738$$

$$i = 1 \rightarrow Var(\hat{\beta}_1) = var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 1 + \hat{a}_2 1^2)$$

$$= 1^{2*0} var(\hat{a}_0) + 1^{2*1} var(\hat{a}_1) + 1^{2*2} var(\hat{a}_2)$$

$$+ 2\left(1^{0+1} cov(\hat{a}_0\hat{a}_1) + 1^{0+2} cov(\hat{a}_0\hat{a}_2) + 1^{1+2} cov(\hat{a}_1\hat{a}_2)\right)$$

$$= 0{,}001188 + 0{,}002281 + 0{,}000132$$

$$+ 2(-0{,}001386 + 0{,}000268 - 0{,}000529)) = 0{,}000307$$

$$s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{0{,}000307} = 0{,}01752142$$

$$i = 2 \rightarrow Var(\hat{\beta}_2) = var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 2 + \hat{a}_2 2^2)$$

$$= 2^{2*0} var(\hat{a}_0) + 2^{2*1} var(\hat{a}_1) + 2^{2*2} var(\hat{a}_2)$$

$$+ 2\left(2^{0+1} cov(\hat{a}_0\hat{a}_1) + 2^{0+2} cov(\hat{a}_0\hat{a}_2) + 2^{1+2} cov(\hat{a}_1\hat{a}_2)\right)$$

$$= 0{,}001188 + 4 * 0{,}002281 + 16 * 0{,}000132$$

$$+ 2(2 * (-0{,}001386) + 4 * 0{,}000268 - 8 * 0{,}000529)) = 0{,}00056$$

$$s_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{0{,}00056} = 0{,}02366$$

$$i = 3 \rightarrow Var(\hat{\beta}_3) = var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 3 + \hat{a}_2 3^2)$$

$$= 3^{2*0} var(\hat{a}_0) + 3^{2*1} var(\hat{a}_1) + 3^{2*2} var(\hat{a}_2)$$

$$+ 2\left(3^{0+1} cov(\hat{a}_0\hat{a}_1) + 3^{0+2} cov(\hat{a}_0\hat{a}_2) + 3^{1+2} cov(\hat{a}_1\hat{a}_2)\right)$$

$$= 0{,}001188 + 9 * 0{,}002281 + 81 * 0{,}000132$$

$$+ 2(3 * (-0{,}001386) + 9 * 0{,}000268 - 27 * 0{,}000529)) = 0{,}000351$$

$$s_{\hat{\beta}_3} = \sqrt{0{,}000351} = 0{,}01873$$

$$i = 4 \rightarrow Var(\hat{\beta}_4) = var(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 4 + \hat{a}_2 4^2)$$

$$= 4^{2*0} var(\hat{a}_0) + 4^{2*1} var(\hat{a}_1) + 4^{2*2} var(\hat{a}_2)$$

$$+ 2\left(4^{0+1} cov(\hat{a}_0\hat{a}_1) + 4^{0+2} cov(\hat{a}_0\hat{a}_2) + 4^{1+2} cov(\hat{a}_1\hat{a}_2)\right)$$

$$= 0{,}001188 + 16 * 0{,}002281 + 256 * 0{,}000132$$

$$+ 2(4 * (-0{,}001386) + 16 * 0{,}000268 - 64 * 0{,}000529)) = 0{,}001252$$

$$s_{\hat{\beta}_3} = \sqrt{0{,}001252} = 0{,}03538$$

Estimación del Modelo de Almon en Eviews

A continuación se describe cómo solicitar a Eviews la estimación de un polinomio de rezagos distribuidos (pdl), donde cada pdl equivale a una variable instrumental construida con un procedimiento de cálculo distinto al de Almon pero que arroja los mismos coeficientes de los términos rezagados.

Para un modelo del tipo

$$Y_t = w_t\delta + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

Se construye un polinomio de orden p para los β

$$\beta_j = \gamma_1 + \gamma_2(j-\delta) + \gamma_3(j-\delta)^2 + \cdots + \gamma_{p+1}(j-\delta)^p \, , \quad j = 0,1,2,3\cdots k \qquad (2)$$

δ es una constante dada por

$$\delta = \begin{cases} k/2 \rightarrow si\ k\ es\ par \\ (k-1)/2 \rightarrow si\ k\ es\ impar \end{cases} \qquad (3)$$

La constante δ no afecta la estimación de β, es incluida solamente para esquivar problemas numéricos que pueden presentarse desde la colineariedad.

La especificación del modelo con k rezagos de X solo debe contener p parámetros. Se debe cumplir la restricción $p < k$, caso contrario reporta matriz singular.

Al especificar PDL, Eviews sustituye 2 en 1, de modo que

$$\begin{aligned} Y_t &= w_t\delta + \left(\gamma_1 + \gamma_2(0-\delta) + \gamma_3(0-\delta)^2 + \cdots + \gamma_{p+1}(0-\delta)^p\right)X_t + \\ &\left(\gamma_1 + \gamma_2(1-\delta) + \gamma_3(1-\delta)^2 + \cdots + \gamma_{p+1}(1-\delta)^p\right)X_{t-1} + \cdots + \\ &\left(\gamma_1 + \gamma_2(k-\delta) + \gamma_3(k-\delta)^2 + \cdots + \gamma_{p+1}(k-\delta)^p\right)X_{t-k} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Eliminando paréntesis

$$\begin{aligned} Y_t &= w_t\delta + \gamma_1 X_t + \gamma_2(0-\delta)X_t + \gamma_3(0-\delta)^2 X_t + \cdots + \gamma_{p+1}(0-\delta)^p X_t + \\ &\gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2(1-\delta)X_{t-1} + \gamma_3(1-\delta)^2 X_{t-1} + \cdots + \gamma_{p+1}(1-\delta)^p X_{t-1} + \cdots + \\ &\gamma_1 X_{t-k} + \gamma_2(k-\delta)X_{t-k} + \gamma_3(k-\delta)^2 X_{t-k} + \cdots + \gamma_{p+1}(k-\delta)^p X_{t-k} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned}Y_t &= w_t\delta + \gamma_1\left(X_t + X_{t-1} + \cdots + X_{t-k}\right)\\ &+ \gamma_2\left((0-\delta)X_t + (1-\delta)X_{t-1} + \cdots + (k-\delta)X_{t-k}\right)\\ &+ \gamma_3\left((0-\delta)^2 X_t + (1-\delta)^2 X_{t-1} + \cdots + (k-\delta)^2 X_{t-k}\right)\\ &+ \cdots\\ &+ \gamma_{p+1}\left((0-\delta)^p X_t + (1-\delta)^p X_{t-1} + \cdots + (k-\delta)^p X_{t-k}\right) + \varepsilon_t\end{aligned}$$

El modelo con variables instrumentales se especifica:

$$Y_t = \alpha + \gamma_1 Z_{1t} + \gamma_2 Z_{2t} + \gamma_3 Z_{3t} + \cdots + \gamma_{p+1} Z_{(p+1)t} + \varepsilon_t \qquad (4)$$

donde

$$\begin{aligned}Z_{1t} &= X_t + X_{t-1} + \cdots + X_{t-k}\\ Z_{2t} &= (0-\delta)X_t + (1-\delta)X_{t-1} + \cdots + (k-\delta)X_{t-k}\\ Z_{3t} &= (0-\delta)^2 X_t + (1-\delta)^2 X_{t-1} + \cdots + (k-\delta)^2 X_{t-k}\\ &\cdots\\ Z_{(p+1)t} &= (0-\delta)^p X_t + (1-\delta)^p X_{t-1} + \cdots + (k-\delta)^p X_{t-k}\end{aligned}$$

Estimar γ desde 4, permite calcular los β y sus errores a partir de la relación 2. Este procedimiento es sencillo a partir de que γ es una transformación lineal de β.

La especificación del polinomio de rezagos distribuidos tiene 3 elementos

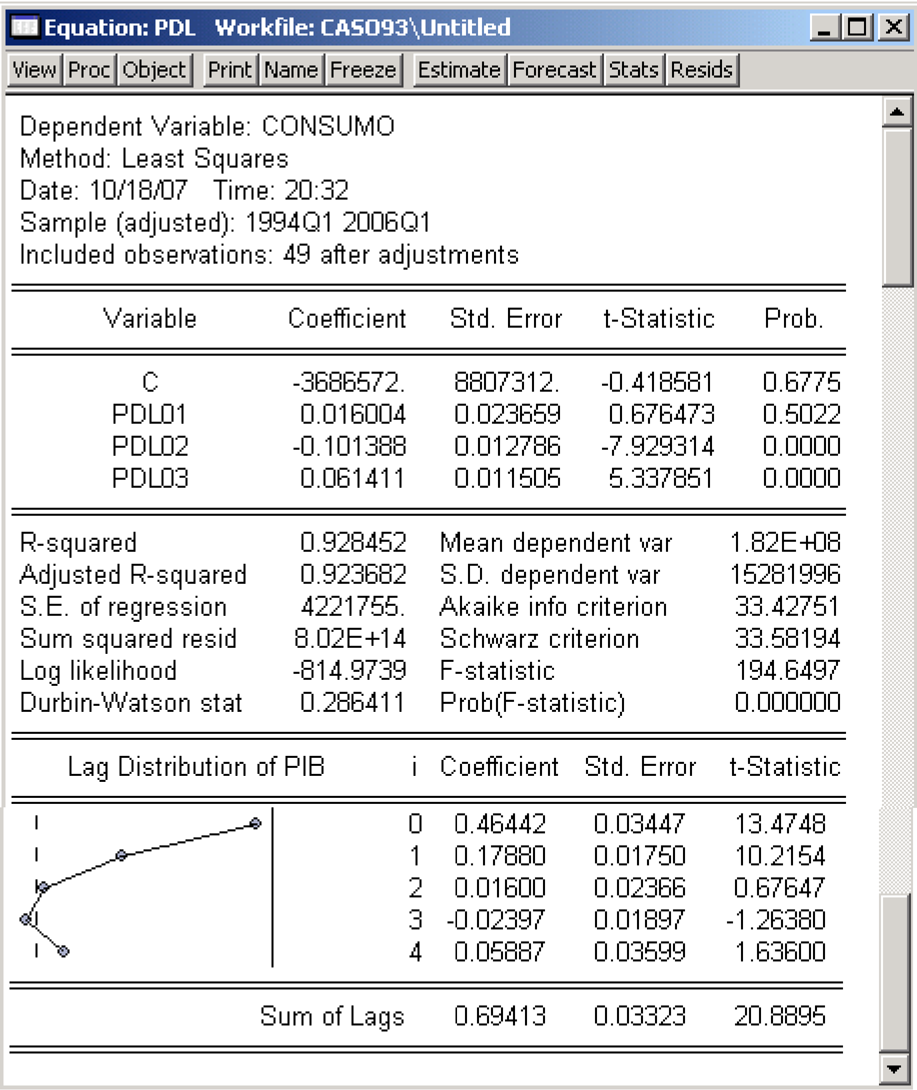
- Longitud del rezago k
- El grado del polinomio p
- Restricciones que se quieran emplear

La estimación en Eviews se realiza desde *Quick-Estimate Equation* consignado en el cuadro de diálogo la expresión *consumo c pdl(pib,4,2)*

Es decir, variable dependiente – ordenada al origen – pdl términos; este último es la sentencia para que el sistema interprete que

- debe rezagar términos de la variable explicativa pib,
- que la cantidad de rezagos tienen que ser 4,
- que el grado del polinomio a considerar es *2*.

El soft proveerá los siguientes resultados


Equation: PDL Workfile: CASO93\Untitled

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: CONSUMO
Method: Least Squares
Date: 10/18/07 Time: 20:32
Sample (adjusted): 1994Q1 2006Q1
Included observations: 49 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-3686572.	8807312.	-0.418581	0.6775
PDL01	0.016004	0.023659	0.676473	0.5022
PDL02	-0.101388	0.012786	-7.929314	0.0000
PDL03	0.061411	0.011505	5.337851	0.0000

R-squared	0.928452	Mean dependent var	1.82E+08
Adjusted R-squared	0.923682	S.D. dependent var	15281996
S.E. of regression	4221755.	Akaike info criterion	33.42751
Sum squared resid	8.02E+14	Schwarz criterion	33.58194
Log likelihood	-814.9739	F-statistic	194.6497
Durbin-Watson stat	0.286411	Prob(F-statistic)	0.000000

Lag Distribution of PIB	i	Coefficient	Std. Error	t-Statistic
	0	0.46442	0.03447	13.4748
	1	0.17880	0.01750	10.2154
	2	0.01600	0.02366	0.67647
	3	-0.02397	0.01897	-1.26380
	4	0.05887	0.03599	1.63600
Sum of Lags		0.69413	0.03323	20.8895

Reemplazando los coeficientes de PDL_{it} en el polinomio de β_i, se obtienen los valores de los coeficientes del PIB.

$$\gamma_1 = 0.016004$$
$$\gamma_2 = -0.101388 \qquad K = 4 \rightarrow \delta = 2 \text{ (Por lo expresado en 3)}$$
$$\gamma_3 = 0.061411$$

Con esta información y dado que se ha definido un polinomio de segundo grado para β_j,

$$\beta_j = \gamma_1 + \gamma_2(j-\delta) + \gamma_3(j-\delta)^2$$

el cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} j = 0 \rightarrow \hat{\beta}_0 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(0-2) + \hat{\gamma}_3(0-2)^2 \\ &= 0.016004 + 0.101388 * 2 + 0.061411 * 4 \\ &= 0.464424 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 1 \rightarrow \hat{\beta}_1 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(1-2) + \hat{\gamma}_3(1-2)^2 \\ &= 0.016004 + 0.101388 * 1 + 0.061411 * 1 \\ &= 0.178803 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 2 \rightarrow \hat{\beta}_2 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(2-2) + \hat{\gamma}_3(2-2)^2 \\ &= 0.016004 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 3 \rightarrow \hat{\beta}_3 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(3-2) + \hat{\gamma}_3(3-2)^2 \\ &= 0.016004 - 0.101388 * 1 + 0.061411 * 1 \\ &= -0.023973 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 4 \rightarrow \hat{\beta}_4 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(4-2) + \hat{\gamma}_3(4-2)^2 \\ &= 0.016004 - 0.101388 * 2 + 0.061411 * 4 \\ &= 0.058872 \end{aligned}$$

$$Consumo_t = -3686572 + 0.464424PIB_t + 0.178803PIB_{t-1} + 0.016004PIB_{t-2} - 0.023973PIB_{t-3} + 0.058872PIB_{t-4}$$

El resultado coincide con los coeficientes que muestra Eviews bajo el título "Lags Distribution of"

¿Cómo proceder cuando el número de rezagos es impar?

Equation: PDL Workfile: CASO93\Untitled

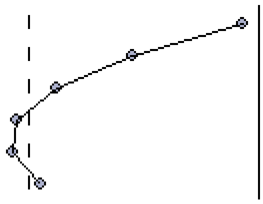
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: CONSUMO
Method: Least Squares
Date: 10/18/07 Time: 20:36
Sample (adjusted): 1994Q2 2006Q1
Included observations: 48 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2764189.	10291906	-0.268579	0.7895
PDL01	0.058942	0.028104	2.097304	0.0417
PDL02	-0.120499	0.013250	-9.093982	0.0000
PDL03	0.036707	0.010474	3.504613	0.0011

R-squared	0.914028	Mean dependent var	1.82E+08
Adjusted R-squared	0.908166	S.D. dependent var	15240742
S.E. of regression	4618570.	Akaike info criterion	33.60872
Sum squared resid	9.39E+14	Schwarz criterion	33.76466
Log likelihood	-802.6094	F-statistic	155.9313
Durbin-Watson stat	0.647908	Prob(F-statistic)	0.000000

Lag Distribution of PIB



i	Coefficient	Std. Error	t-Statistic
0	0.44677	0.04105	10.8826
1	0.21615	0.01511	14.3068
2	0.05894	0.02810	2.09730
3	-0.02485	0.02800	-0.88750
4	-0.03523	0.01606	-2.19416
5	0.02780	0.04348	0.63943
Sum of Lags	0.68958	0.03882	17.7633

La imagen muestra la estimación de un modelo especificado de la siguiente manera:

$$Consumo_t = \alpha + \beta_0 PIB_t + \beta_1 PIB_{t-1} + \beta_2 PIB_{t-2} + \beta_3 PIB_{t-3} + \beta_4 PIB_{t-4} + \beta_5 PIB_{t-5} + \mu_t$$

Que en Eviews se indicó: consumo c pdl(pib,5,2)

Los coeficientes de PDL_{it}

$$\gamma_1 = 0.058942$$
$$\gamma_2 = -0.120499 \qquad K = 5 \rightarrow \delta = \frac{k-1}{2} = 2 \text{ (por lo expresado en 3)}$$
$$\gamma_3 = 0.036707$$

Deben reemplazarse en el polinomio de β_i, ($\beta_j = \gamma_1 + \gamma_2(j-\delta) + \gamma_3(j-\delta)^2$) para obtener los valores de los coeficientes del PIB.

$$\begin{aligned} j = 0 \rightarrow \hat{\beta}_0 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(0-2) + \hat{\gamma}_3(0-2)^2 \\ &= 0.058942 + 0.120499 * 2 + 0.036707 * 4 \\ &= 0.446768 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 1 \rightarrow \hat{\beta}_1 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(1-2) + \hat{\gamma}_3(1-2)^2 \\ &= 0.058942 + 0.120499 + 0.036707 \\ &= 0.216148 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 2 \rightarrow \hat{\beta}_2 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(2-2) + \hat{\gamma}_3(2-2)^2 \\ &= 0.058942 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 3 \rightarrow \hat{\beta}_3 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(3-2) + \hat{\gamma}_3(3-2)^2 \\ &= 0.058942 - 0.120499 + 0.036707 \\ &= -0.02485 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 4 \rightarrow \hat{\beta}_4 &= \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2(4-2) + \hat{\gamma}_3(4-2)^2 \\ &= 0.058942 - 0.120499 * 2 + 0.036707 * 4 \\ &= -0.035228 \end{aligned}$$

$$j=5 \rightarrow \hat{\beta}_5=\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2(5-2)+\hat{\gamma}_3(5-2)^2$$
$$=0.058942-0.120499*3+0.036707*9$$
$$=0.027808$$

$$Consumo_t = \text{-}2764189+0.446768PIB_t+0.216148PIB_{t-1}+0.058942PIB_{t-2}$$
$$-0.02485PIB_{t-3}-0.035228PIB_{t-4}+0.027808PIB_{t-5}$$

BIBLIOGRAFIA

- Chiang, A. (2006) “Métodos fundamentales de economía matemática”. Mc.Graw Hill.
- Gujarati, D. (2004) "Econometría". 4°Edición. Mc.Graw Hill. México.
- Perez, C. (2008). “Econometría”. 4º Edición. Mc. Graw Hill. México.
- Quantitative Micro Software (2007). “EViews 6 User`s Guide”. USA