

Capítulo 25. MODELOS ARCH-GARCH

25.1 INTRODUCCIÓN	1038
25.2 ESPECIFICACIÓN DE MODELOS GARCH.....	1040
CONTRASTE DE HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL AUTORREGRESIVA (ARCH)	1041
CONTRASTE HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONA AUTORREGRESIVO GENERALIZADO (GARCH)	1042
ESTRUCTURA DE LOS MODELOS HETEROCEDÁSTICOS CONDICIONALES.....	1042
25.3 MODELOS ALTERNATIVOS	1043
GARCH-M	1043
GARCH(P,Q) CON REGRESORES EXÓGENOS	1044
TARCH(p,q,r).....	1044
EGARCH(p,q,r)	1045
PARCH(p,q,r).....	1046
CGARCH(p,q,r)	1046
MODELO IGARCH(P,Q).....	1047
25.4 ESTIMACIÓN DE MODELOS ARCH Y GARCH	1047
25.5 PRONÓSTICO	1049
CASOS DE ESTUDIO, PREGUNTAS Y PROBLEMAS	1049
CASO 25.1: FONDO DE INVERSIÓN RENTA FIJA.....	1049
CASO 25.2: FONDO DE INVERSIÓN INVESTIRE ACCIONES	1050
CASO 25.3: FONDO DE INVERSIÓN INVESTIRE AMÉRICA.....	1050
BIBLIOGRAFÍA.....	1050

Capítulo 25. Modelos ARCH-GARCH

En las series observadas a lo largo del tiempo es posible no encontrar varianzas constantes. Esta variabilidad suele denominarse volatilidad y es frecuente encontrarla en las series financieras.

La modelización de series con estas características, generalmente presentan heterocedasticidad y la reespecificación del modelo suele no dar lugar a resultados favorables.

En estos contextos, resulta oportuno modelar la volatilidad de la serie y son los modelos autorregresivos con heterocedasticidad condicional la alternativa válida.

25.1 Introducción

Las estructuras de heterocedasticidad autorregresiva condicional (ARCH) o su generalización (GARCH) están asociadas a la no estacionariedad de la serie. Generalmente, las primeras diferencias de la serie pueden dar lugar a estacionariedad en media pero con volatilidad, lo cual sugiere que la varianza de la serie se modifica con el paso del tiempo.

El modelo de heterocedasticidad condicional autorregresivo (ARCH) fue desarrollado originariamente por Engel. Considera que la heterocedasticidad -o varianza desigual- puede tener una estructura autorregresiva, donde la heterocedasticidad observada a lo largo de periodos distintos quizás este autocorrelacionada.

El modelo ARCH modeliza el comportamiento de los errores generando un proceso autorregresivo para ellos, siendo los errores la medida de volatilidad. En sí misma, la volatilidad puede definirse de muchas maneras diferentes. Por ejemplo: dada una variable Y_t no estacionaria, sus primeras diferencias se definen por

$$dY = Y_t - Y_{t-1}$$

el valor medio viene dado por

$$dY = d\bar{Y}$$

luego se define

$$X = dY - d\bar{Y}$$

donde X es la diferencia entre periodos ajustado por la media. En este contexto se puede utilizar X^2 como medida de volatilidad.

Un modelo especificado como

$$X_t^2 = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1}^2 + \varepsilon_t \Rightarrow ARCH(1)$$

Generalizando

$$X_t^2 = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p X_{t-p}^2 + \varepsilon_t \Rightarrow ARCH(p)$$

Si el coeficiente β que acompaña a los rezagos son individualmente significativamente distintos de cero $\Rightarrow$ se tiene un modelo ARCH con el rezago que corresponde.

Una alternativa a la definición de volatilidad puede ser

$$Y_t = \beta + \varepsilon_t$$

donde β es la constante. A partir de estimar el valor de $\hat{Y}_t$, se obtienen los errores $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t$, luego se modeliza la medida de volatilidad $\hat{\varepsilon}_t^2$

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_1 + \beta_2 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 \Rightarrow ARCH(1)$$

Si β_2 es significativo entonces existe un efecto ARCH en los errores (los σ^2 están correlacionados).

25.2 Especificación de modelos GARCH

Al especificar un modelo lineal con series temporales

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

Se supone que el término de error $[\varepsilon_t]$ se comporta con:

- Meda nula $E(\varepsilon_t) = 0$
- Varianza constante $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma^2 \quad \forall i = j$
- Covarianza nula $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Para verificar el cumplimiento de estas hipótesis, se utilizan los contrastes de Goldfeld-Quandt, White y Breusch-Pagan analizados

oportunamente; a estos se le agregan los contrastes de Glejser, ARCH y GARCH.

Contraste de heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH)

Engel (1982) propuso que la matriz de varianzas y covarianzas del término de error del modelo

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

Depende del cuadrado de los errores observados en el pasado

$$\sigma_t^2 = V(\varepsilon_t) = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + d_2 \varepsilon_{t-2}^2 \dots + d_p \varepsilon_{t-p}^2$$

Esta estructura se denomina ARCH(p). Si $d_1 = d_2 = \dots = d_p = 0$ no existe efecto ARCH, equivalente a decir que no existe heterocedasticidad.

En la práctica se realizan los siguientes pasos:

1. se estima el modelo $\mathbf{Y}_t = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$
2. se obtienen los $\mathbf{e}$
3. se realiza la regresión auxiliar

$$e_t^2 = V(\varepsilon_t) = d_0 + d_1 e_{t-1}^2 + d_2 e_{t-2}^2 \dots + d_p e_{t-p}^2$$

4. con la prueba de significatividad conjunta F, se contrasta Homocedasticidad con la $H_0: d_0 = d_1 = d_2 \dots = d_p = 0$

Contraste heterocedasticidad condicional autorregresivo generalizado (GARCH)

Boliersiev (1986) amplió la estructura ARCH de Engel incluyendo en la especificación de la σ^2 valores retardados de la misma; de modo que en una estructura GARCH(p,q) se tiene

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + d_2 \varepsilon_{t-2}^2 \dots + d_p \varepsilon_{t-p}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \sigma_{t-q}^2$$

La prueba de significatividad conjunta F, contrasta Homocedasticidad con la $H_0: d_0 = d_1 = d_2 \dots = d_p = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_q = 0$

Estructura de los modelos heterocedásticos condicionales

La estructura de un modelo autorregresivo heterocedástico condicional (ARCH) de p rezagos [ARCH(p)] a estimar es

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + d_2 \varepsilon_{t-2}^2 \dots + d_p \varepsilon_{t-p}^2$$

Si generalizamos el modelo anterior y estimamos un GARCH(p,q), la estructura de modelo a estimar es

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + d_2 \varepsilon_{t-2}^2 \dots + d_p \varepsilon_{t-p}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \sigma_{t-q}^2$$

Se espera que

$$d_0 > 0 \quad d_i \geq 0 \quad \alpha_j \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{\max(r,j)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$$

Para que la varianza sea positiva. Si algún coeficiente en la varianza es negativo significa que el modelo está mal definido.

El modelo GARCH más simple es GARCH(1,1) que puede expresarse como

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2$$

El cual enuncia que la varianza del término de error ε depende del término de error al cuadrado del periodo anterior y de su varianza condicional en el periodo anterior.

Cuando d (Durbin-Watson) informa la existencia de autocorrelación puede deberse a la presencia del efecto ARCH o GARCH.

La identificación de p y q se realiza como en los modelos ARIMA a través del correlograma y el correlograma parcial.

Las estructuras ARCH(p) y GARCH(p,q) son las sencillas, a partir de acá se pueden incorporar otros elementos que dan lugar a otras estructuras con otro nombre.

25.3 Modelos alternativos

GARCH-M

Este modelo fue planteado por Engle, Lilien y Robins (1987) y se caracteriza por introducir la varianza $[\sigma_t^2]$ en la ecuación del modelo

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \lambda \sigma_t^2 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + d_2 \varepsilon_{t-2}^2 \dots + d_p \varepsilon_{t-p}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \sigma_{t-q}^2$$

Este modelo tiene dos variantes consistentes en introducir en la ecuación el $\log(\sigma_t^2)$ o el desvío (σ)

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \lambda \log(\sigma_t^2) + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \lambda \sigma + \varepsilon_t$$

La segunda ecuación del modelo GARCH-M, donde se modelizan las varianzas ¿también se reespecifica?

GARCH(p,q) con regresores exógenos

La característica de estos modelos es incorporar factores exógenos que explican el comportamiento de la varianza de los errores. La especificación general es

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + d_2 \varepsilon_{t-2}^2 \dots + d_p \varepsilon_{t-p}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \sigma_{t-q}^2 + Z\Pi$$

Donde $Z\Pi$ puede adoptar diversas formas entre las que se encuentran los modelos TARARCH(p,q,r), EGARCH(p,q,r), PARARCH(p,q,r) y CGARCH(p,q,r)

TARCH(p,q,r)

Modelo propuesto por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993), denominado Threshold GARCH (umbral o tolerancia GARCH) también se lo conoce como modelo GJR, es

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + d_p \varepsilon_{t-p}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \sigma_{t-q}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 \Gamma_{t-1} + \dots + \gamma_r \varepsilon_{t-r}^2 \Gamma_{t-r}$$

Donde Γ es una variable indicadora que toma valor 1 si $\varepsilon_t < 0$ y valor 0 en otro caso. De esta manera se incorpora asimetría negativa al modelo, sólo se considera si el residuo es negativo; caso contrario no se considera.

Si $\hat{\gamma} > 0$ y significativamente distinto de 0, existe impacto asimétrico en la volatilidad.

Si $\hat{\gamma}$ no es significativo, el impacto de la variable indicadora no es asimétrico y se prefiere el modelo GARCH.

EGARCH(p,q,r)

Modelo propuesto por Nelson (1991), denominado Exponential GARCH, garantiza la no negatividad de la varianza condicional al formular la ecuación de volatilidad en términos del logaritmo

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \dots + d_p \left| \frac{\varepsilon_{t-p}}{\sigma_{t-p}} \right| + \alpha_1 \log(\sigma_{t-1}^2) + \dots + \alpha_q \log(\sigma_{t-q}^2) + \beta_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \dots + \beta_r \frac{\varepsilon_{t-r}}{\sigma_{t-r}}$$

A diferencia de lo indicado por Perez Lopez(...), Fabris modela la varianza considerando el logaritmo de la variable dependiente

$$\log(\sigma_t^2) = d_0 + d_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \dots + d_p \left| \frac{\varepsilon_{t-p}}{\sigma_{t-p}} \right| + \alpha_1 \log(\sigma_{t-1}^2) + \dots + \alpha_q \log(\sigma_{t-q}^2) + \beta_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \dots + \beta_r \frac{\varepsilon_{t-r}}{\sigma_{t-r}}$$

PARCH(p,q,r)

Modelo denominado Power o Potencia ARCH, se especifica

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^r = d_0 + d_1(|\varepsilon_{t-1}| - \beta_1 \varepsilon_{t-1})^r + \dots d_p(|\varepsilon_{t-p}| - \beta_p \varepsilon_{t-p})^r + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots \alpha_q \sigma_{t-q}^2$$

Donde $r > 0$; $|\beta| < 1 \forall i = 1, 2, \dots, s$; $\beta = 0$ si $i > s$ y $s \leq p$

Par Fabris () este modelo no tiene σ_t^2 como variable dependiente, sino σ_t^r el modelo estima r. Si $r=2$, el modelo se reduce a un GARCH(p,q). ¿porqué?

CGARCH(p,q,r)

Modelo denominado Component GARCH o Component ARCH, se especifica

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1(\varepsilon_{t-1}^2 - d_0) + \dots d_p(\varepsilon_{t-p}^2 - d_0) + \alpha_1(\sigma_{t-1}^2 - d_0) + \dots \alpha_q(\sigma_{t-q}^2 - d_0)$$

Fabris () dice que este modelo flexibiliza la condición de que la σ_t^2 incondicional permanezca fija en todo el periodo. ¿donde está el r? Perez Lopez () lo presenta como CGARCH(p,q,r)

A diferencia de lo indicado por Perez Lopez(...), Fabris modela la varianza considerando el logaritmo de la variable dependiente

$$\log(\sigma_t^2) = d_0 + d_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \dots + d_p \left| \frac{\varepsilon_{t-p}}{\sigma_{t-p}} \right| + \alpha_1 \log(\sigma_{t-1}^2) + \dots + \alpha_q \log(\sigma_{t-q}^2) + \beta_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \dots + \beta_r \frac{\varepsilon_{t-r}}{\sigma_{t-r}}$$

Modelo IGARCH(p,q)

Modelo propuesto por Engle y Bollerslev (1986), también denominado Integrado GARCH. Estos modelos fuerzan a que la suma de los coeficientes sea menor que 1 y se usan para modelar efectos persistentes.

La especificación de un modelo IGARCH(1,1) es

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - d_1) \sigma_{t-1}^2$$

25.4 Estimación de modelos ARCH y GARCH

Si bien la característica de volatilidad es habitual en series financieras también es posible encontrar esta estructura en otras series referidas a otros sectores de la economía o a características a través del tiempo que presenten otras disciplinas.

En la práctica, se especifica un modelo estructural uniecuacional en series de tiempo. Luego de la estimación se analiza la verificación de los supuestos tanto sobre los términos de error como respecto de la parte sistemática del modelo.

En lo referido a los contrastes de homocedasticidad, es conveniente verificar la mayor cantidad de test disponibles, incluido el test ARCH. Si se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad, es posible que se esté en presencia de una cierta heterocedasticidad condicional.

El correlograma de los residuos informa cuántos rezagos pueden ser significativos, esta información se incorpora en la especificación de un modelo GARCH(p,q).

La modelización GARCH contempla 2 ecuaciones, una expresa la especificación para la variable de interés en cualquiera de las maneras posibles (ARIMA, modelo lineal, modelo no lineal u otros) y la otra ecuación especifica la varianza de los errores.

Ante modelos alternativos se comparan los criterios de Akaike y Schwarz, el valor y signo de los coeficientes, la bondad de ajuste, los supuestos sobre el término de perturbación, entre otros.

La estimación con Eviews muestra 2 cuadros. El primero es la estimación de la media, el modelo de la variable de interés. El segundo estima los coeficientes del modelo de la varianza condicional.

A partir de la varianza condicional

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + d_2 \varepsilon_{t-2}^2 \dots + d_p \varepsilon_{t-p}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \sigma_{t-q}^2$$

se calcula la incondicional

$$E(\sigma_t^2) = \frac{d_0}{1 - d_1 - d_2 \dots - d_p - \alpha_1 - \alpha_2 \dots - \alpha_q}$$

En Fabris (...) se encuentran más detalles de cómo se llega a esta igualdad.

25.5 Pronóstico

En un GARCH(1,1)

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = d_0 + d_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2$$

El pronóstico será

$$\widehat{\sigma_{t+1}^2} = \widehat{d_0} + \widehat{d_1} e_t^2 + \widehat{\alpha_1} \sigma_t^2$$

El intervalo de confianza para la variable analizada en el t+1 será

$$\widehat{Y_{t+1}} \pm Z_{\alpha/2} * \widehat{\sigma_{t+1}}$$

CASOS DE ESTUDIO, PREGUNTAS Y PROBLEMAS

Caso 25.1: Fondo de Inversión Renta Fija

- 1) Hacer correlograma e identificar los rezagos. Por la forma de la función de autocorrelación se sospecha de un proceso de medias móviles en los errores y por la autocorrelación parcial de un proceso autorregresivo de dos rezagos. Por el test de raíz unitaria es estacionaria
- 2) Se especifica Renta = β_1 ARMA(1,03)
- 3) Se realiza el test de ARCH y se ve que no hay heterocedasticidad.

Caso 25.2: Fondo de inversión Investire Acciones

- 1- Hacer correlograma
- 2- Especificar ARMA(1,1)
- 3- No hay heterocedasticidad ni autocorrelación

Caso 25.3: Fondo de inversión Investire América

- 1- Hacer correlograma y raíz unitaria
- 2- Especificar ARMA(1,2)
- 3- Hay errores no normales autocorrelacionados y heterocedásticos.

Bibliografía

- Fabris, J. (2009) "Econometría Financiera. Modelos y Pronósticos". Omicron Editorial
- IHS Global Inc (2019). "Eviews 11, Users Guide II". IHS Markit, Irvine (USA).
- Perez Lopez, C. (2006). "Problemas Resueltos de Econometría". Editorial Thomson Paraninfo.
- Perez, C. (2008). Econometría Avanzada. Técnicas y Herramientas". Pearson Prentice Hall