Capítulo 23. SERIES TEMPORALES

Capítulo 23. SERIES TEMPORALES

Este capítulo introduce el estudio de las series temporales desde la metodología Box Jenkings, contemplando la identificación de las series, la especificación en modelos ARIMA, la estimación y validación de los resultados.

22.1 Introducción

Cualquier serie de tiempo puede ser generada por un proceso estocástico o aleatorio; y un conjunto concreto de información (una serie de datos) puede ser considerado como una realización del proceso estocástico subyacente.

La diferencia entre un proceso estocástico y su realización es semejante a la distinción entre información de corte transversal poblacional y muestral. La realización en la serie de tiempo se utiliza para inferir sobre al proceso estocástico subyacente. Un proceso estocástico o aleatorio es una colección de variables aleatorias ordenadas en el tiempo.

Un proceso estocástico estacionario tiene media y varianza constante en el tiempo, la covarianza entre dos periodos de tiempo depende de la distancia o rezago entre estos dos periodos de tiempo y no del tiempo en el cual se ha calculado la covarianza. Esta característica de la serie es importante para hacer pronósticos.

En un proceso estocástico no estacionario la media y/o varianza varían con el tiempo. El comportamiento de estas series sirve para estudiar el periodo bajo estudio pero no puede generalizarse para otros periodos, por lo que no sirven para pronóstico.

Un proceso puramente aleatorio o de ruido blanco tiene media igual a cero, varianza constante igual a σ^2 y no esta serialmente correlacionada.

$$\mu \sim N(0, \sigma^2 I) \Rightarrow ruido\ blanco$$

23.2 Modelo de caminata aleatoria

Se denomina caminata aleatoria a las series de tiempo que no son estacionarias. Las que no tienen término constante son sin variación y las que tienen término constante son con variación.

La caminata aleatoria sin variación es

$$Y_t = Y_{t-1} + \mu$$

donde a μ se lo conoce como error o choque aleatorio. El efecto de este choque se retroalimenta en el tiempo por lo que se dice que la caminata aleatoria tiene memoria infinita. La caminata aleatoria sin variaciones es un proceso estacionario de diferencia porque

$$Y_t = Y_{t-1} + \mu \Rightarrow \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \mu_t$$

donde si μ_t es ruido blanco, la serie es estacionaria.

En la caminata aleatoria con variación

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + \mu$$

donde δ es el parámetro de variación, la media y la varianza aumentan con el tiempo. Al tomar primeras diferencias en la variable dependiente Y_t se tiene un proceso de tendencia estocástica que puede ser estacionario, o puede estacionalizarse luego de varias diferenciaciones.

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \delta + \mu$$

Una serie estacionaria es un proceso estocástico fijo en el tiempo, da lugar a la modelización a través de una ecuación con coeficientes fijos que pueden estimarse a partir de datos pasados.

Un proceso estocástico estacionario es aquel donde su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende solamente de la distancia o rezagos entre estos dos periodos de tiempo y no del tiempo en el cual se ha calculado la covarianza.

Si las variables siguen caminatas aleatorias, la regresión de una sobre la otra conduce a resultados falsos. Esto es así porque una caminata aleatoria tiene varianza no finita, lo cual da lugar a estimadores no consistentes. La serie en primeras diferencias sí es estacionaria.

Además, si las variables siguen caminata aleatoria, el efecto de un shock temporal no se disipa sino que será permanente.

Dada una serie de tiempo Y_t

Media: $E(Y_t) = \mu$ (1)

Varianza: $Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$ (2)

Covarianza: $\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$ (3)

Si $k = 0 \Rightarrow \gamma_0 = E[(Y_t - \mu)(Y_t - \mu)] = \sigma^2\ (Varianza)$

$k = 1 \Rightarrow \gamma_1 = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+1} - \mu)] = Cov(Y_t; Y_{t+1})$

Si una serie es estacionaria, su desplazamiento de Y_t a Y_{t+m} arroja igual valor de media, varianza y covarianza en Y_{t+m} que en Y_t.

Cuando la serie es no estacionaria, el proceso cambia a lo largo del tiempo. Una serie de tiempo estacionaria es una serie integrada de orden 0. Cuando la serie está integrada de orden d F(d) significa que ha sido diferenciada "d" veces. Un proceso estacionario tiene media, varianza y covarianza estacionaria.

El procedimiento de diferencia se aplica cuando la serie es no estacionaria para volverla estacionaria

Si: $\left.\begin{array}{l} X_t \sim \mathrm{I}(0) \Rightarrow estacionaria \\ Y_t \sim \mathrm{I}(1) \Rightarrow no\ estacionario \end{array}\right\rangle Z_t = X_t + Y_t = I(1) \Rightarrow no\ estacionaria$

Si $\begin{array}{l} X_t \sim \mathrm{I}(\mathrm{d}) \Rightarrow \textit{no estacionaria} \\ Z_t = a + bX_t = I(d) \Rightarrow \textit{no estacionanria} \end{array}$

Si $\begin{array}{l} X_t \sim \mathrm{I}(0) \Rightarrow \textit{estacionaria} \\ Z_t = a + bX_t = I(0) \Rightarrow \textit{estacionanria} \end{array}$

Si $\left.\begin{array}{l} X_t \sim \mathrm{I}(\mathrm{d}_1) \Rightarrow \textit{no estacionaria} \\ Y_t \sim \mathrm{I}(\mathrm{d}_2) \Rightarrow \textit{no estacionario} \end{array}\right\rangle Z_t = aX_t + bY_t \sim I(d_2) \quad \textit{donde } d_1 < d_2$

Si $\left.\begin{array}{l} X_{t<} \sim \mathrm{I}(\mathrm{d}) \\ Y_t \sim \mathrm{I}(\mathrm{d}) \end{array}\right\rangle Z_t = aX_t + bY_t \sim I(d^*) \textit{donde } d^* \textit{ suele ser} < d$

La serie cuando no es estacionaria, incrementa indefinidamente su varianza.

Si una serie de tiempo ha sido diferenciada una vez y la serie diferenciada resulta ser estacionaria se dice que la serie original es integrada de orden 1 y se denota por I(1). En general, si una serie de tiempo debe ser diferenciada "d" veces se dice que está integrada de orden d [I(d)].

Si $d = 0 \Rightarrow I(0) \Rightarrow$ serie estacionaria

$d = 1 \;\; o\ mas \;\; \Rightarrow$ serie es no estacionaria

Comenzamos ahora el tratamiento sobre construcción y uso de modelos de series de tiempo.

Estos modelos se basan en que las series han sido generadas por un proceso aleatorio (estocástico)

23.2.1 Proceso estocástico estacionario alrededor de una tendencia (TS) y estacionario en diferencia (DS).

La introducción explicita de la variable de tendencia en la regresión tiene el efecto de eliminar la influencia de la tendencia de las otras variables. Hay econometristas que dicen que esta práctica puede aceptarse solo si la variable de tendencia es determinística y no estocástica.

Determinística $\Rightarrow$ predecible y no variable

¿Cómo saber si la tendencia de una serie es determinística o variable?

Se estima una serie a partir de la relación (19) y se encuentra que

$\rho = 1$ $\Rightarrow$raíz unitaria $\rightarrow$ Serie de tiempo con tendencia estocástica.

Si por el contrario

$\rho = 0$ $\Rightarrow$la serie de tiempo presenta tendencia determinística.

Si en $Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \mu_t$ (21)

μ_t es estacionario $\Rightarrow \begin{cases} Media\ 0 & E(\mu) = 0 \\ Varianza\ \sigma^2 & E(\mu^2) = \sigma^2 \end{cases}$

Entonces (21) representa un "proceso estacionario alrededor de una tendencia" (TSP)

Si se resta la tendencia de (21) el resultado es un problema estacionario. Pero, si Y_t esta generado como

$$Y_t - Y_{t-1} = \alpha + \mu_t \qquad (22)$$

Donde α es una constante, μ es estacionario $E(\mu)=0$ y $E(\mu^2)=\sigma^2$

Ese proceso se denomina "proceso estacionario en diferencia" (DSP).

¿Cuál es la significancia practica del TSP y del DSP?

Para las proyecciones de largo plazo las realizadas a partir de un TSP serán más confiables.

23.3 Métodos para conocer estacionariedad

Para estudiar la estacionariedad se puede recurrir a tres métodos:

1) Prueba Grafica

2) Función de autocorrelación y correlograma

3) Prueba de la raíz unitaria

23.3.1 Prueba gráfica

La ilustración del comportamiento de las variables a lo largo del tiempo que muestran tendencias -crecientes o decrecientes- son indicios de no estacionariedad, porque la media es variable a lo largo del tiempo.

23.3.2 Función de autocorrelación y correlograma

La función de autocorrelación informa cuánta correlación existe entre datos individuales contiguos en la serie Y; consiste en calcular:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\text{cov}\,a\,rianza\ al\ rezago\ k}{\text{var}\,i\,anza}$$

Si k=0 $\hat{\rho}_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$

El gráfico de $\hat{\rho}_k$ frente a k, se conoce como correlograma muestral y se construye a partir de una función de autocorrelación muestral calculando las covarianzas muestrales al rezago k

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{T-k}$$

Y la varianza muestral

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \bar{Y})^2}{T-1}$$

La función de autocorrelación muestral al rezago k es

$$\hat{\rho}_k = \frac{\widehat{\gamma_k}}{\widehat{\gamma_0}}$$

Si el proceso es estacionario, el correlograma no se sale de las bandas. El primer rezago tiene valores de $\hat{\rho}_k$ relativamente altos y decrecientes a medida que aumenta el número de rezagos.

Cuando las barras del correlograma se salen de las bandas tenemos un proceso no estacionario.

Si no sale de las bandas $\Rightarrow$estacionario

Si sale de las bandas$\Rightarrow$no estacionario

La significatividad individual de un coeficiente de correlación ($\hat{\rho}_k$) se analiza a través de la prueba de Barlett que tiene distribución normal. Se parte del supuesto que la serie presenta ruido blanco

$$Y_t = \varepsilon_t$$

Donde $E(\varepsilon)_t = 0$

Los coeficientes de autocorrelación muestral se distribuyen como una normal con media 0 y varianza $\frac{1}{T}$.

$$\hat{\rho}_k \sim N\left(0, {}^{1}/_{T}\right)$$

Y el intervalo de confianza se define como

$$\hat{\rho}_k \pm Z_{1-\alpha}\left({}^{1}/_{\sqrt{T}}\right)$$

$$P\left(\hat{\rho}_k - Z_{1-\alpha}\sigma_{\rho_k} \leq \rho_k \leq \hat{\rho}_k + Z_{1-\alpha}\sigma_{\rho_k}\right) = 1 - \alpha$$

Y se docima la $H_0 := \rho_k = 0$

Para analizar la significatividad conjunta se utiliza el estadístico Q de Box y Pierce

$$Q = n\sum_{k=1}^{m}\hat{\rho}_k^2$$

Donde n es el tamaño de la muestra y m la longitud del rezago. La hipótesis nula es que todos los ρ son cero

$$H_0: \rho_k = 0 \quad \forall k = 1,2, \dots . m$$

Se testea con una $Q \sim \chi^2_m$

Otra prueba para ver significatividad conjunta, alternativa al estadístico Q para muestras pequeñas, es la propuesta por Ljung Box (LB).

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}\right) \sim \chi^2_m \qquad (12)$$

La hipótesis nula plantea que hay estacionariedad

$$H_0 = \rho_k = 0 \qquad \forall k = 0,1,2 \dots \dots m$$

Cuando se está en presencia de una serie no estacionaria se la debe diferenciar una o mas veces y la serie resultante será estacionaria. Una serie no estacionaria se denomina homogénea; y el número de diferencias que se le hacen, orden de homogeneidad.

La función de autocorrelación nos puede brindar indicios de comportamientos estacionales de la serie. Se observa en los valores de $\hat{\rho}_k$ que presentan máximos alternados por ejemplo en $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_{12}, \hat{\rho}_{36} \dots$ da lugar a estacionalidad anual.

23.3.3 Prueba de raíz unitaria

Dado el modelo $Y_t = \rho Y_{t-1} + \mu_t$

con $-1 < \rho \leq 1$

media cero $E(\mu_t) = 0$

varianza constante y no autocorrelación $E(\mu_i \mu_i) = \sigma^2 I$

El modelo es autorregresivo de primer orden o AR(1) en la cual se efectúa la regresión del valor de Y en el tiempo t sobre su valor en el tiempo (t-1). Si se cumplen los supuestos sobre el error se dice que es ruido blanco.

Si el coeficiente (correlación entre el momento t y el t-1) es igual a 1, surge el problema de la no estacionariedad. Se dice que la serie tiene raíz unitaria, se comporta como una caminata aleatoria y es no estacionaria.

$H_0: \rho = 1 \Rightarrow$ existe raíz unitaria $\Rightarrow$caminata aleatoria $\Rightarrow$serie no estacionaria

Se han desarrollado varios test que informan la situación de la serie. A continuación se describen algunos de ellos, los que encuentran en Eviews conjuntamente a otras alternativas.

Test de Dickey Fuller (DF)

El estadístico empírico de DF se calcula haciendo $\frac{\hat{\rho}}{s_{\hat{\rho}}}$, el que se contrasta con el estadístico τ (tau) tabulado por Dickey Fuller.

La hipótesis nula es la existencia de raíz unitaria (serie no estacionaria). Si $(\hat{\rho}/s_{\hat{\rho}}) > \tau$ se rechaza $H_o \Rightarrow$ serie estacionaria

La prueba Dickey-Fuller se aplica para:

Modelo sin constante o caminata aleatoria: $\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \mu_t$ (17)

Modelo con contante o caminata aleatoria con variaciones:

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + \mu_t \tag{18}$$

Modelo con constante y tendencia o caminata aleatoria con variaciones alrededor de una tendencia (donde t es la variable de tiempo o tendencia):

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + \mu_t \tag{19}$$

En todos los casos $H_0 : \delta = 0 \Rightarrow$ raíz unitaria $\Rightarrow$ no estacionariedad.

Donde $\delta = (\rho - 1)$ y $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$, siendo *Δ* es el operador en primeras diferencias

---

Observación: $\delta = \rho - 1$

En $Y_t = \rho Y_{t-1} + \mu_t$

Se resta en ambos miembros Y_{t-1}

$$Y_t - Y_{t-1} = \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + \mu_t$$

$$\Delta(Y_t - Y_{t-1}) = (\rho - 1)Y_{t-1} + \mu_t$$

$$\Delta(Y_t - Y_{t-1}) = \delta Y_{t-1} + \mu_t$$

Si $\delta = \rho - 1$

Con $\rho = 1 \rightarrow \delta = 0$ significa raíz unitaria, no estacionariedad

Test Dickey Fuller Aumentado (DFA)

Si la variable dependiente en (19) sigue un proceso autorregresivo AR(p), la hipótesis general es

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \rho_i Y_{t-i} + \mu_t \quad \mu_t \sim N(0, \sigma^2 I) \tag{20}$$

Que puede expresarse como

$$Y_t = \rho Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i \Delta Y_{t-i} + \mu_t \quad \mu_t \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Donde $\Delta Y_{t-1} = (Y_{t-1} - Y_{t-2})$

La $H_0 : \delta = 0$ o $\rho = 1 \Rightarrow Y_t$ tiene raíz unitaria, es no estacionaria

Cuando se aplica en 20 la prueba DF se la llama prueba Dickey-Fuller aumentada (ADF).

Test de Phillips Perron (1988)

Es una prueba no paramétrica que extiende la prueba DFA cuando hay autocorrelación de errores. El estadístico a utilizar es

$$\tilde{t} = t_\rho \left(\frac{\gamma_0}{f_0}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{T(f_0 - \gamma_0)s_{\hat{\beta}}}{2 f_0^{\frac{1}{2}} s}$$

Donde $\tilde{t}$ es la estimación, t_{ρ} es el ratio de ρ de la correlación, $s_{\hat{\beta}}$es el coeficiente estándar de error, y s es el error estándar de la regresión de prueba. Además, γ_0 es una estimación consistente de la varianza de error, calculada como $\frac{(T-k)s^2}{T}$, donde k es el número de regresores. El término restante, f_0 es un estimador del espectro residual en frecuencia cero. Para más detalles consultar Eviews, Guía 2.

Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (KPSS, 1992)

El estadístico KPSS se basa en los residuos minimocuadráticos ordinarios de Y_t sobre variables exógenas

$$Y_t = X_t'\delta + \mu_t$$

La hipótesis nula es que Y_t es estacionaria y el estadístico de contraste LM se define como

$$LM = \sum_t \left[\frac{{s_t}^2}{T^2{}_{f_0}}\right]$$

Donde f_0 es el estimador del espectro residual con frecuencia 0 y s_t es la función acumulativa de residuos.

Cuando las series tienen cambio estructural, las pruebas de raíz unitaria convencionales están sesgadas. Desde la versión 11 de Eviews se encuentran test de raíz unitaria que contemplan la presencia de rupturas y estacionalidades.

23.4 Elaboración de modelos AR, MA y ARIMA para series de tiempo.

Popularmente conocido como metodología Box-Jenkins (BJ) pero técnicamente conocido como ARIMA, el énfasis de este método de está en el análisis de las propiedades probabilísticas de las series de tiempo econométricas bajo la filosofía de permitir que la información hable por sí misma. Esta modelización permite predecir el comportamiento futuro de la serie según como haya sido el comportamiento pasado.

Estos modelos no derivan de alguna teoría y se recomienda utilizar más de 50 datos. Es posible construir modelos uniecuacionales (univariantes) o multiecuacionales (multivariantes).

El término ARIMA significa autorregresivo (AR), integrado (I, por el orden de diferenciación) y media móvil (MA).

Los modelos ARIMA, conjuntamente con los modelos VAR, ARCH (Heterocedasticidad condicional autorregresiva), GARCH (Heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada), la regresión uniecuacional y los modelos multiecuacionales, son los enfoques más utilizados a la hora de pronosticar una serie de tiempo. Estos métodos han sustituidos a los métodos de alisado exponencial.

23.5.1 Proceso autorregresivo AR

Un proceso autorregresivo de orden p o AR (p) para la variable Y_t se define

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Donde δ es constante, ε_t es ruido blanco e incorrelacionado con Y_{t-1} para todo i. Es decir:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 \mathbf{I}$$

$$Cov(Y_{t-i} \varepsilon_t) = 0$$

Reordenando el proceso autorregresivo de orden p

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \cdots \phi_p Y_{t-p} = \delta + \varepsilon_t$$

Puede expresarse mediante el operador de retardos (L) (también denominado por Perez Lopez y otros 'operador de cambio retroactivo') de la siguiente manera:

$$\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots \phi_p L^p\right) Y_t = \delta + \varepsilon_t$$

Para que el proceso autorregresivo de orden p [AR (p)] sea estacionario, las raíces de la ecuación

$$X^p - \phi_1 X^{p-1} - \phi_2 X^{p-2} - \cdots \phi_{p-1} X - \phi_p = 0$$

Son todas inferiores a la unidad, lo que asegura que la trayectoria temporal es convergente a algún valor de equilibrio.

Un proceso autorregresivo siempre es invertible. Esto significa que siempre puede expresarse como un proceso de medias móviles.

23.5.2 Proceso de media móvil (MA)

Si Y_t se modela

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Se dice que Y_t sigue un proceso de media móvil de primer orden o MA(1). Donde μ es una constante, ε es el termino de error aleatorio con ruido blanco, Y_t es igual a una constante μ más un promedio móvil de los términos de error presente y pasado.

En forma general

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

con μ constante y ε_t ruido blanco, es un proceso MA(q), combinación lineal de términos de error con ruido blanco.

Aplicando el operador de retardo (L)

$$Y_t = \mu + \left(1 + \beta_1 \mathrm{L} + \beta_2 \mathrm{L}^2 + \cdots \ldots + \beta_q \mathrm{L}^q\right) \varepsilon_t$$

Un proceso de medias móviles siempre es estacionario pero no siempre es invertible. Para que sea invertible, las raíces del polinomio

$$1 + \beta_1 \mathrm{L} + \beta_2 \mathrm{L}^2 + \cdots \ldots + \beta_q \mathrm{L}^q = 0$$

Deben caer fuera del círculo unidad. Esto equivale a que las raíces de la ecuación

$$X^q - \phi_1 X^{q-1} - \phi_2 X^{q-2} - \cdots \phi_{q-1} X - \phi_q = 0$$

Sean todas inferiores a la unidad en valor absoluto; lo cual permite convertir un proceso MA() en un proceso AR(). En términos generales, las condiciones de invertibilidad indican que:

- Los procesos AR(p) admiten una representación MA(∞)
- Cualquier proceso MA(q) bajo ciertas condiciones puede expresarse como un AR(∞)

23.5.3 Proceso autorregresivo y de media móvil (ARMA)

Si Y_t tiene características AR y MA

$$Y_t = \delta + \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Donde δ es una constante

Y_t sigue un proceso AR(1) y MA(1) conocido como ARMA(1,1)

En general

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Sigue un proceso ARMA (p,q). Separando los procesos

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \cdots \phi_p Y_{t-p} = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Utilizando el operador de retardos

$$\left(1 - \phi_1 L^1 - \phi_2 L^2 - \cdots \phi_p L^p\right) Y_t = \delta + \left(1 - \theta_1 L^1 - \theta_2 L^2 - \cdots \theta_q L^q\right) \varepsilon_t$$

Que también puede escribirse como

$$(\phi L^p) Y_t = \delta + (\theta L^q) \varepsilon_t$$

Reexpresando en términos de Y_t

$$Y_t = (\phi L^p)^{-1}(\delta + (\theta L^q)\varepsilon_t)$$

Por lo que un proceso ARMA(pq) es equivalente a un proceso de medias móviles de infinitos términos con p+q coeficientes independientes.

La condición necesaria y suficiente de estacionariedad es que $(\phi L^p)^{-1}$ sea convergente, para lo cual las raíces $\phi L = 0$ deben estar fuera del círculo de radio unitario.

También es posible decir

$$(\theta L^q)^{-1}(\phi L^p)Y_t = (\theta L^q)^{-1}\delta + \varepsilon_t$$

Que equivale a un proceso autorregresivo de infinitos términos con p+q coeficientes independientes. Si θL^{-1} es convergente, es decir las raíces de $\theta L = 0$ son mayores que 1, entonces el proceso es invertible.

Las condiciones de estacionariedad y de invertibilidad son independientes. La estacionariedad de un proceso ARMA(pq) viene dada por su componente autorregresiva; mientras que, la invertibilidad la define el componente de medias móviles.

Por lo tanto, se puede decir que un modelo ARMA(pq) es invertible si las raíces del polinomio en L $\left[1 - \theta_1 L^1 - \theta_2 L^2 - \cdots \theta_q L^q = 0\right]$ caen fuera del círculo unidad. Esta condición equivale a que las raíces de la ecuación $\left[X^q - \phi_1 X^{q-1} - \phi_2 X^{q-2} - \cdots \phi_{q-1} X - \phi_q = 0\right]$ sean todas inferior a 1 en módulo (en valor absoluto).

Un modelo ARMA(pq) es estacionario si las raíces del polinomio definido por $\left[1-\phi_1 L^1-\phi_2 L^2-\cdots \phi_p L^p=0\right]$ caen fuera del círculo unidad. Esta condición equivale a que las raíces de la ecuación $\left[X^p-\phi_1 X^{p-1}-\phi_2 X^{p-2}-\cdots \phi_{p-1} X-\phi_p=0\right]$ sean todas inferiores a 1 en módulo.

23.5.4 Proceso autorregresivo integrado de media móvil (ARIMA)

Cuando se está en presencia de series de tiempo no estacionarias, es necesario diferenciarlas para volverlas estacionarias; es decir integrarlas.

Si la serie debe diferenciarse d veces para hacerla estacionaria y luego aplicar a esta el modelo ARMA(p,q) se dice que la serie de tiempo es ARIMA(p,d,q) $\Rightarrow$ serie autorregresiva integrada de media móvil.

Formalmente se expresa

$$\left(1-\phi_1 L^1-\phi_2 L^2-\cdots \phi_p L^p\right)(1-L)^d Y_t=\left(1-\theta_1 L^1-\theta_2 L^2-\cdots \theta_q L^q\right)\varepsilon_t$$

Este modelo permite describir una serie de observaciones después de que hayan sido diferenciadas d veces.

Dada la serie original Y_t, si ésta es homogénea de orden d, entonces

$$\Delta^d Y_t=Z_t \qquad \forall t=1,2 \ldots \ldots T$$

Δ^d es el número de veces que se ha sometido a diferenciación X_t para volverla estacionaria.

Z_t es la transformación de Y_t a partir de sucesivas diferenciaciones

Si Z_t obedece a un proceso ARMA(pq)

$$Z_t = (\phi L^p)^{-1}(\theta L^q)\varepsilon_t$$

Entonces

$$Y_t = \Delta^{-d}(\phi L^p)^{-1}(\theta L^q)\varepsilon_t$$

Y se dice que Y_t es ARIMA(pdq)

23.5.5 Modelización ARIMA

Para utilizar la metodología Box Jenkins se debe tener una serie estacionaria porque el modelo se utilizará para predecir y debe suponer características constantes a través del tiempo.

Para seguir la metodología Box Jenkins para predecir se debe:

- -Identificar
- -Estimar
- -Verifican diagnósticos
- -Predecir

La Identificación permite encontrar los valores apropiados p, d, q a partir de la función de autocorrelación, la función de autocorrelación parcial y los correlogramas. La autocorrelación parcial ρ_{kk} mide la correlación entre observaciones (series de tiempo) que están separadas k periodos de tiempo manteniendo constantes las correlaciones en los rezagos intermedios. Es decir, la autocorrelación parcial es la correlación entre Y_t y Y_{t-1} después de eliminar el efecto de las Y_t intermedias.

El modelo ARIMA se especifica de acuerdo al patrón teórico de comportamiento de la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial.

	F. Autocorrelación	F. Autocorrelación parcial
AR(p)	Disminución exponencial o con patrón sinusoidal decreciente o ambos	Picos grandes a lo largo de los p rezagos
MA(q)	Picos grandes a lo largo de los q rezagos	Disminución exponencial
ARMA(p,q)	Disminución exponencial	Disminución exponencial

La Estimación se realiza con software que facilitan la aplicación del modelo matemático que esté detrás.

La Verificación de diagnóstico permite establecer si los residuos estimados a partir del modelo son de ruido blanco, si no lo son debe empezarse nuevamente el proceso.

Para obtener el pronóstico para Y_t, es necesario tener en cuenta si la variable ha sido diferenciada. Por ejemplo: para el modelo AR(2)

$$Y_t = \alpha + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad \forall\, t = 1980 \ldots 2006$$

Si se quiere pronosticar el valor de 2007, y Y_t esta diferenciado, el valor de 2007 será

$$\left(Y_{2007}-Y_{2006}\right)=\hat{\alpha}+\hat{\alpha}_1\left(Y_{2006}-Y_{2005}\right)+\hat{\alpha}_2\left(Y_{2005}-Y_{2004}\right)$$

De modo que

$$Y_{2007}=\hat{\alpha}+\hat{\alpha}_1 Y_{2006}+Y_{2006}-\hat{\alpha}_1 Y_{2005}+\hat{\alpha}_2 Y_{2005}-\hat{\alpha}_2 Y_{2004}$$

$$Y_{2007}=\hat{\alpha}+\left(\hat{\alpha}_1+1\right)Y_{2006}+\left(\hat{\alpha}_2-\hat{\alpha}_1\right)Y_{2005}-\hat{\alpha}_2 Y_{2004}$$

23.6 Raíces invertidas en el polinomio

Esto es válido tanto en el polinomio de AR como en el de MA y, si bien la explicación se centrará en el polinomio de segundo grado, es extensible al de grado enésimo.

La especificación de un modelo AR(2) es

$$Y_t=\alpha_0+\alpha_1 Y_{t-1}+\alpha_2 Y_{t-2}+\varepsilon_t \qquad 1$$

que también puede expresarse como

$$Y_t-\alpha_1 Y_{t-1}-\alpha_2 Y_{t-2}=\alpha_0+\varepsilon_t \qquad 2$$

(2) presenta características similares a una ecuación en diferencias de segundo orden, solo que esta retardada.

La ecuación en diferencia de segundo orden se define como

$$Y_{t+2}+a_1 Y_{t+1}+a_2 Y_t=c \qquad 3$$

El análisis de esta ecuación permite conocer si la trayectoria temporal de la variable converge (o diverge) a un valor de equilibrio y cómo es esa convergencia (oscilante o no).

La solución general de esta ecuación tiene dos partes

$$Y_t=Y_c+Y_p \qquad 4$$

$Y_c \Rightarrow$ función complementaria

$Y_p \Rightarrow$ integral particular

Para encontrar la función complementaria se debe trabajar en le ecuación reducida

$$Y_{t+2} + a_1 Y_{t+1} + a_2 Y_t = 0 \qquad 5$$

(5) tiene una ecuación característica que es

$$b^2 + a_1 b + a_2 = 0 \qquad 6$$

cuya solución puede ser:

Raíces iguales da lugar a $Y_c = A_1 b^t + A_2 b^t t$

Raíces distintas da lugar a $Y_c = A_1 b_1^t + A_2 b_2^t$ 7

Raíces complejas da lugar a $Y_c = R^t \left(A_5 \cos \theta t + A_6 sen \theta t \right)$

La convergencia existe cuando las raíces son menores que 1 en valor absoluto $|b| < 1$

Si $b > 0 \Rightarrow$ convergencia

La integral particular indica el valor de equilibrio intertemporal de largo plazo.

Es el valor al cual converge la trayectoria temporal o a partir de la cual diverge.

Veamos donde está el punto de unión entre el proceso autorregresivo de orden 2 planteado en (2) y la ecuación en diferencia planteada en (3)

En (3) teníamos que

$$Y_{t+2} + a_1 Y_{t+1} + a_2 Y_t = c$$

Utilizando el operador de adelanto B podemos expresar a (3) como

$$\left(B^2 + a_1 B + a_2\right) Y_t = c$$

En síntesis, se puede expresar el primer miembro como

$$aB^2 Y_t = Y_{t+2} \qquad 8$$

Por otro lado, a partir de la expresión (2) tenemos

$$\left(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2\right) Y_t = \alpha_0 + \varepsilon_t \qquad 9$$

Utilizando el operador de retardo L (9) puede expresarse como

$$\left(\alpha L^2\right) Y_t = \alpha_0 + \varepsilon_t \qquad (10)$$

El primer miembro representa

$$\alpha L^2 Y_t = Y_{t-2}$$

La relación entre el operador B de (8) y el operador L de (10) es

$$B = L^{-1} \qquad (11)$$

Retomemos (10)

$$\left(\alpha L^2\right) Y_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$$

αL^2 es un polinomio de segundo grado cuya solución característica da por resultado las raíces que anulan el polinomio

$$\alpha L^2 = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 = \left(1 - \lambda_1 L_1\right)\left(1 - \lambda_2 L_2\right) = 0 \qquad 12$$

L_1 y L_2 son las raíces que resuelven el polinomio

Definamos $a = -\alpha_2$, $b = -\alpha_1$ y $c = 1$

recordemos que un polinomio $ax^2 + bx + c = 0$ se resuelve haciendo

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resolviendo para L

$$\tilde{L}_1, \tilde{L}_2 = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1{}^2 + 4\alpha_2}}{-2\alpha_2} \qquad 13$$

Donde $\tilde{L}_1 = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1{}^2 + 4\alpha_2}}{-2\alpha_2}$ y $\tilde{L}_2 = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1{}^2 + 4\alpha_2}}{-2\alpha_2}$

Retomemos (9), nos interesa la solución para Y_t por lo que

$$Y_t = \frac{1}{\left(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2\right)} \left(\alpha_0 + \varepsilon_t\right) \qquad 14$$

o bien $Y_t = \left(\alpha L^2\right)^{-1} \left(\alpha_0 + \varepsilon_t\right)$

Esta expresión $\left(\alpha L^2\right)^{-1}$ significa hallar la inversa de las raíces del polinomio en AR, y es aquí donde se tiene en cuenta la relación de equivalencia en (11).

Reemplazando los resultados de (13) en (12)

$$\alpha L^2 = \left(1 - \lambda_1 \tilde{L}_1\right)\left(1 - \lambda_2 \tilde{L}_2\right) = 0 \qquad (15)$$

La incógnita ahora es λ_i que es la inversa de la raíz del polinomio.

$$\text{Si } 1 - \lambda_i \tilde{L}_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = \frac{1}{\tilde{L}_i} \qquad 16$$

Entonces, si Y_t es estacionaria $\left(\alpha L^2\right)^{-1}$ debe converger. Para que esto pase, las raíces de αL^2 tienen que ser mayores a 1 (es decir $|L_i| > 1$) entonces $\left(\alpha L^2\right)^{-1}$ tendrá solución menor que 1 (es decir $|\lambda_i| < 1$) que es la condición de convergencia de la ecuación en diferencia.

En términos del círculo unitario

$|L_i| > 1$ esta fuera para que $|\lambda_i| < 1$ este dentro 17

y estas son las condiciones de estacionariedad.

Con los valores de λ_i se explicita la solución complementaria según (7). Bajo el supuesto de que las raíces son reales y distintas

$$Y_t^c = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t \qquad 18$$

Para hallar la integral particular retomemos

$$Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-2} = \alpha_0 + \varepsilon_t$$

Ahora se busca el valor de equilibrio intertemporal o de largo plazo de Y_t. Si se toma esperanza matemática

$$E(Y_t) - \alpha_1 E(Y_{t-1}) - \alpha_2 E(Y_{t-2}) = E(\alpha_0 + \varepsilon_t)$$

$$\overline{Y}_t - \alpha_1\overline{Y}_t - \alpha_2\overline{Y}_t = \alpha_0 + E(\varepsilon_t)$$

Si ε_t es estacionario $E(\varepsilon_t) = 0$, por ende

$$(1 - \alpha_1 - \alpha_2)\overline{Y}_t = \alpha_0$$

$$\overline{Y}_t = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)} \qquad 19$$

(19) es la expresión de la integral particular, para que esta integral exista $(\alpha_1 - \alpha_2) \neq 1$. Si $(\alpha_1 - \alpha_2) = 1$ significa que no existe el equilibrio intertemporal constante en el largo plazo, lo que tendremos será un equilibrio móvil del tipo

$$Y_t^p = \gamma t \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{\alpha_0}{-\alpha_1 + 2}$$

Si $E(\varepsilon_t) \neq 0$ entonces habrá que encontrar un proceso de medias móviles para los errores antes de encontrar el valor del equilibrio intertemporal.

Retomando (4), (18) y (19) la solución general será

$$Y_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2} \qquad 20$$

CASOS DE ESTUDIO, PREGUNTAS Y PROBLEMAS

Caso 23.1: Producto Bruto Interno de Argentina

Identificar y modelar la serie de tiempo anual Producto Bruto Interno de Argentina desde 1993

Identificar y modelar la serie de tiempo trimestral Producto Bruto Interno de Argentina desde 1993

Caso 23.2: Producto Bruto Interno de Argentina trimestral entre 1993-2008

Con la serie trimestral de PBI de Argentina entre primer trimestre de 1993 y primer trimestre de 2008 se ejemplifica la modelización de un proceso autorregresivo y el cálculo de las raíces invertidas del polinomio.

Se especifica un proceso AR(2)

$$PBI_t = \alpha_0 + \alpha_1 PBI_{t-1} + \alpha_2 PBI_{t-2} + \varepsilon_t$$

El modelo estimado es

$$P\hat{B}I_t = 350758{,}2 + 1{,}74 PBI_{t-1} - 0{,}75 PBI_{t-2} \qquad 21$$

Reexpresando

$$PBI_t - 1{,}74 PBI_{t-1} + 0{,}75 PBI_{t-2} = 350758{,}2$$

el polinomio característico es

$$1 - 1{,}74L + 0{,}75L^2 = (1 - \lambda_1 L_1)(1 - \lambda_2 L_2) \qquad 22$$

Reordenando el polinomio en términos de $ax^2 + bx + c = 0$

$$0,75L^2 - 1,74L + 1 = 0$$

donde $a = 0,75 \quad b = -1,74 \quad c = 1$

$$L_1, L_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1,74 \pm \sqrt{1,74^2 - 4 \cdot 0,75}}{2 \cdot 0,75}$$

$$L_1 = 1,289 \text{ y } L_2 = 1,033 \tag{23}$$

L_1 y L_2 son las raíces características del polinomio y mayores que 1. Según se vio en (17) se cumplen parcialmente las condiciones de estacionariedad.

Reexpresando el polinomio (22) con los resultados de (23)

$$1 - 1,74L + 0,75L^2 = (1 - \lambda_1 1,289)(1 - \lambda_2 1,033) = 0$$

Ahora hay que encontrar los valores de λ_i que anulen al polinomio

$$\left.\begin{array}{c} 1 - \lambda_1 1,289 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{1,289} = 0,776 \\ 1 - \lambda_2 1,033 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{1}{1,033} = 0,968 \end{array}\right\rangle \tag{24}$$

$$\left.\begin{array}{c} |\lambda_1| < 1 \\ |\lambda_2| < 1 \end{array}\right\rangle \text{ convergencia}$$

$$\left.\begin{array}{c} |\lambda_1| > 0 \\ |\lambda_2| > 0 \end{array}\right\rangle \text{ no oscilante}$$

Con los resultados de (24) explicitemos la solución característica

$$PBI_t^c = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t$$

$$PBI_t^c = A_1 0,776^t + A_2 0,968^t \tag{25}$$

La integral particular se construye a partir de (21) teniendo en cuenta el resultado de (19)

$$PBI_t^p = \frac{350758,2}{1 - 1,74 + 0,75} = 48849451,4 \tag{26}$$

Siguiendo a (4), y utilizando los resultados parciales de (25) y (26), se construye la solución general.

$$PBI_t = A_1 0{,}776^t + A_2 0{,}968^t + 48849451{,}4 \qquad 27$$

La solución definida contempla hacer $t = 0$ y $t = 1$ en (27)

Si $\begin{array}{l} t = 0 \quad \rightarrow \quad PBI_0 = A_1 + A_2 + 48849451{,}4 \\ t = 1 \quad \rightarrow \quad PBI_1 = A_1 0{,}776 + A_2 0{,}968 + 48849451{,}4 \end{array}$

Que define el sistema

$$\left.\begin{array}{l} PBI_0 = A_1 + A_2 + 48849451{,}4 \\ PBI_1 = A_1 0{,}776 + A_2 0{,}968 + 48849451{,}4 \end{array}\right\rangle \qquad 28$$

Es necesario asignar un valor al PBI en el momento 0 y el momento 1. Si se adopta

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \quad \rightarrow \quad 4Q2007 \quad \rightarrow \quad PBI = 371566{,}0 \\ t = 1 \quad \rightarrow \quad 1Q2008 \quad \rightarrow \quad PBI = 373920{,}6 \end{array}\right\rangle \qquad 29$$

Luego se reemplaza en (28) las condiciones iniciales dadas en 29

$$371566{,}0 = A_1 + A_2 + 48849451{,}4$$

$$373920{,}6 = A_1 0{,}776 + A_2 0{,}968 + 48849451{,}4$$

Resolviendo

$$\left.\begin{array}{r} A_1 + A_2 = -48477885 \\ A_1 0{,}776 + A_2 0{,}968 = -48475531 \end{array}\right\rangle \qquad 30$$

(30) es un sistema de ecuaciones simultáneas con 2 incógnitas, de la primera ecuación

$$A_1 = -48477885 - A_2 \qquad 31$$

reemplazando en la segunda ecuación del sistema 30

$$\left(-48477885 - A_2\right)0{,}776 + A_2 0{,}968 = -48475531$$

$$A_2\left(0{,}968 - 0{,}776\right) = -10869549$$

$$A_2 = \frac{-10869549}{0{,}192248} = -56539261{,}4 \qquad 32$$

reemplazando (32) en (31)

$$A_1 = 8061376$$

La solución definida es

$$PBI_t = 8061376 * 0{,}776^t - 56539261{,}4 * 0{,}968^t + 48849451{,}4$$

Graficar en Excel la integral particular y la solución definida.

Bibliografía

- Chiang, Alpha (2006). "Métodos Fundamentales de Economía Matemática". 4º Edición.
- Gujarati, D. (2004) "Econometría". 4°Edición. Mc.Graw Hill. México.
- Johnston, J. y Dinardo, J. (2001). "Métodos de econometría". Editorial Vicens Vives. Barcelona.
- Otero, J.M. (1993). "Econometría". Series Temporales y Predicción. Editorial AC.
- Pindyck, R. S. y Rubinfeld, D. R. (2003). "Econometría, Modelos y Pronósticos". 4º Edición. Editorial McGraw Hill. México.
- Rodríguez Gonzáles, Andrés. (s/f) Series Temporales. Modelos lineales Estocásticos. Universidad de La Laguna. España