

MODELOS DE SERIES TEMPORALES

1. Previsión en Economía

1.1. Tanto en la Micro como en la Macroeconomía, se plantea el problema de la toma de decisiones, es decir la elección de una opción entre diversas alternativas. Cuando se toman decisiones, el decisor se encuentra en un ambiente de incertidumbre respecto a los sucesos que se pueden producir en el futuro. Es decir, se encuentra frente a la posibilidad de elegir entre varias decisiones alternativas y deberá tener en cuenta la utilidad de sus decisiones ante cada uno de los sucesos posibles. Estos sucesos están situados en el futuro y el decisor los desconoce. Para lograr reducir la incertidumbre sobre el futuro se utilizan los métodos de previsión.

1.2. Con las técnicas de previsión se trata de hacer pronósticos lo más acertadamente posible sobre los sucesos que todavía no han tenido lugar. Las previsiones que utiliza el econometrista o el estadístico están basadas en un análisis explícito de la información proporcionada por los sucesos ocurridos en un pasado más o menos inmediato. Desde un punto de vista metodológico, los métodos de previsión se pueden agrupar de la siguiente manera:

Métodos cualitativos. Son métodos que se utilizan cuando el pasado no proporciona información directa sobre el fenómeno considerado, por ejemplo cuando aparecen nuevos productos en el mercado o cuando se analiza un fenómeno político o sociológico. Los métodos estadísticos juegan un papel relativamente secundario.

Método Delphi

Método Cross – impact

Brainstorming

Métodos cuantitativos. Se parte del supuesto que se tenga registrada información sobre el pasado acerca del fenómeno que se desea estudiar. Generalmente la información sobre el pasado aparece en forma de series temporales. Se pueden clasificar en

Análisis Causal

Modelos uniecuacionales

Modelos multiecuacionales

Análisis Univariante

Métodos de Descomposición

Calculo de Tendencia

Desestacionalización

Métodos de Alisado Exponencial

Modelos ARIMA univariantes

Modelos Multivariantes de series temporales

1.3. En los métodos cuantitativos la misión del estadístico es extraer toda la información posible contenida en los datos y en el patrón de conducta seguida en el pasado. En el caso de las series temporales hay que analizar la cantidad de información contenida en la misma y su patrón de conducta. Esto posibilita establecer que una serie puede ser determinista (hora de salida del sol registrada durante 100 años) o puramente aleatoria (primer premio de la lotería registrado durante 100 años).

1.4. En general, las series económicas son series que contienen componentes deterministas (D) y componentes aleatorios (A), los cuales pueden ser aditivos o concebirse de otra manera:

$$Y_t = A_t + D_t$$

Una vez planteado el problema, con los métodos de previsión cuantitativos se pretende conocer los componentes subyacentes de una serie y su forma de integración, con objeto de realizar previsiones del futuro. Respecto a estos métodos, se pueden considerar dos grandes grupos que se denominan análisis univariante y análisis causal.

1.5. Se estudiarán los métodos para pronosticar las variaciones futuras de una variable basando las previsiones en el comportamiento pretérito de esa variable. Por ejemplo, si se considera la función temporal $\{Y_t\}$ representada en la figura 1.1. ,

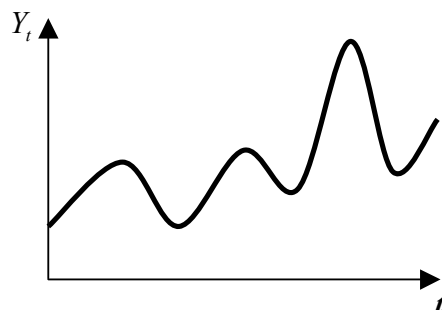


Fig. 1.1.

La figura 1.1 podría representar el comportamiento histórico de cualquier variable económica o empresarial: un índice bursátil, un tipo de interés, un índice de producción o incluso el volumen diario de ventas de algún bien. Es posible que se pueda explicar, o no, - sobre la base a la teoría económica o en razonamientos intuitivos - porqué Y_{t+s} , se comportó precisamente de esa forma.

1.6. Si $\{Y_t\}$ representa, por ejemplo, el volumen de ventas de algún bien, su movimiento puede deberse en parte a variaciones en los precios, en la renta de los consumidores o en los tipos de interés. Sin embargo, gran parte de ese movimiento puede deberse a factores que no se pueden explicar, tales como el tiempo

atmosférico, cambio en las preferencias de los consumidores o simplemente a ciclos estacionales (o no estacionales) en los gastos de consumo. Puede resultar difícil o imposible explicar el movimiento de $\{Y_t\}$ mediante un modelo estructural, es decir relacionándolo explícitamente con otras variables económicas. Esto ocurriría, por ejemplo si no se dispusiera de datos acerca de aquellas variables explicativas que se cree afecta a $\{Y_t\}$. También podría ocurrir que, aún disponiendo de datos, la estimación de un modelo de regresión para $\{Y_t\}$ diera como resultado errores tan grandes que la mayoría de los coeficientes estimados no fueran significativos y el error tipo de predicción fuera inaceptablemente grande. Incluso, aunque se pudiera estimar una ecuación de regresión estadísticamente significativa, el resultado pudiera no ser útil a los fines predictivos.

1.7. Es evidente, por tanto, que pueden darse situaciones en las que sea imposible o poco deseable “explicar” $\{Y_t\}$ mediante un modelo estructural y se podría preguntar si existe una forma alternativa para obtener una predicción de $\{Y_t\}$. ¿Existen algunos procedimientos tales que, a partir de la observación de la serie temporal de la figura 1.1, permitan extraer algunas conclusiones acerca de su comportamiento pretérito que permitieran inferir su comportamiento futuro probable. Por ejemplo, ¿existe alguna tendencia general creciente de $\{Y_t\}$ la cuál, puesto que ha dominado el comportamiento de la serie en el pasado puede ser que domine también el comportamiento en el futuro? O bien, ¿presenta la serie un comportamiento cíclico que se pueda extrapolar para el futuro? Si existe un comportamiento sistemático de este tipo, se puede intentar construir un modelo para la serie temporal que no ofrece una explicación estructural de su comportamiento en términos de otras variables, sino que reproduce el comportamiento de la serie en el pasado de tal forma que pueda ser útil para predecir su comportamiento en el futuro. Sobre esta base el Modelo de Series Temporales tiene en cuenta el esquema de los movimientos pretéritos de una variable determinada y utiliza esta información para predecir los movimientos futuros de dicha variable. En cierto sentido un modelo de series temporales no es más que un método de extrapolación sofisticado. Sin embargo puede proporcionar un instrumento muy eficaz para la predicción. Generalmente se elegirá un modelo de series temporales en aquellos casos en que se posea poca información acerca de los determinantes del comportamiento de la variable que interesa, pero en cambio se posean suficientes datos para construir un modelo de series temporales de considerable magnitud.

1.8. Por lo tanto, en el análisis univariante, a diferencia del análisis causal, se trata de hacer previsiones de valores futuros de una variable, utilizando como información únicamente la contenida en los valores pasados de la serie temporal que mide la evolución de la variable objeto de estudio. Hasta hace poco tiempo los manuales de econometría han estado dedicados casi exclusivamente al estudio de los modelos causales estocásticos, bien uniecuacionales o bien multiecuacionales. En los últimos años existe la tendencia a incorporar en estos textos el estudio de series temporales siguiendo básicamente el enfoque de Box y Jenkins (véase por ejemplo, Pulido 1993, páginas 501 a 637). No tiene sentido decir que los métodos econométricos

convencionales y los métodos de series temporales son contrapuestos, ya que son de carácter complementario. Para Uriel¹, “la diferencia entre el enfoque tradicional y el enfoque de series temporales, acerca de la elaboración de modelos causales, sería la siguiente: en el primero, el énfasis se sitúa en el modelo de partida, efectuándose contrastes sobre la adecuación entre modelo y datos; por el contrario, en el enfoque de series temporales el punto de partida son los datos y quizás alguna idea general sobre el fenómeno que se trata de modelizar, siendo el modelo el resultado final de la investigación”.

1.9. Siguiendo con la distinción entre métodos univariantes y métodos causales puede surgir el siguiente interrogante: en una investigación concreta, ¿qué línea es conveniente seguir?. Cuando se dispone de un modelo adecuado, de información estadística suficiente y de una previsión precisa de los factores exógenos es preferible utilizar un modelo causal como instrumento para la previsión. Caso contrario, cuando no se dan simultáneamente esas circunstancias es necesario recurrir al análisis de series temporales. En cualquier caso, es recomendable, como una primera aproximación a un fenómeno, efectuar un análisis de carácter univariate. Ahora bien, cuando el número de observaciones es pequeño, inferior a 60 - aunque este número es un tanto arbitrario (no se ha demostrado teóricamente esa cota)-, no sería recomendable la utilización de esta metodología.

1.10. En el análisis univariante de series temporales se pueden considerar tres grandes grupos según la clasificación presentada en 1.2.

- *Métodos de descomposición.* Se parte de que el patrón o esquema de generación de una serie temporal se puede descomponer en varios subesquemas. Generalmente se distinguen los siguientes componentes: tendencia, movimiento estacional y relativas cíclicas – irregulares. De esta manera, la serie Y_t - que es la observada por el estadístico -, se puede obtener como,

$$Y_t = T_t \bullet C_t \bullet E_t \bullet I_t$$

Esto es un esquema multiplicativo, entre tendencia, factor cíclico, estacionalidad y componente irregular. Otra alternativa sería obtener la serie mediante suma de los cuatro componentes. En los métodos de descomposición se trata de aislar la tendencia o la componente estacional.

Para el cálculo de la tendencia, un procedimiento consiste en ajustar una curva a los datos por medio de MCO, para luego aislar la componente tendencial.

Los métodos de desestacionalización tienen por objeto aislar la componente estacional. El método de desestacionalización más usado es el X-11 desarrollado –en 1967- por el Bureau of Census del Departamento de Comercio de los EE.UU. Este método es el más extendido en la actualidad, aunque en el año 1978 la estadística argentina Estela Dagum ha introducido ciertos refinamientos en el método basándose en el enfoque ARIMA.

¹ Ezequiel Uriel. “Análisis de Series Temporales. Modelos ARIMA”. Editorial Paraninfo. Madrid 1995

- *Método de alisado exponencial.* Los métodos de alisado exponencial permiten también calcular los valores de la tendencia, pero a diferencia de MCO en cada punto se hace una revisión en función de las observaciones más recientes. Por tal motivo, se dice que los métodos de alisado exponencial proporcionan una tendencia de carácter local. El más aplicado es el de Mínimos cuadrados ponderados. En este método, considerando el modelo siguiente, en el que $f(t)$ es una función de tiempo,

$$Y_t = f(t) + \mu_t$$

se trata de minimizar la expresión

$$\sum w_t [y_t - f(t)]^2, \quad 0 < w_t < 1$$

Seleccionando los pesos w_t de forma que tengan un decrecimiento exponencial. De este modo, las observaciones más recientes tendrán un mayor peso en la determinación de la tendencia correspondiente al momento actual.

- *Modelo ARIMA univariante.* Tanto en los métodos de descomposición como de alisado exponencial, el analista establece un esquema a priori y después procede a los cálculos estadísticos correspondientes. En los modelos ARIMA univariantes se hace un planteamiento inicial de carácter general. Se considera que la serie temporal objeto de estudio ha sido generada por un proceso estocástico. Las técnicas de elaboración de los modelos ARIMA van dirigidas precisamente a identificar el modelo generador de las observaciones, para después, en un proceso iterativo, estimar y verificar el modelo, que una vez aceptado se utiliza para predecir valores futuros de la serie temporal. Conviene aclarar que los métodos de alisado exponencial son casos particulares de los modelos ARIMA. Convendría mencionar también la existencia de los modelos UCARIMA debidos a Harvey (1984) quién logró formular modelos estructurales que pueden considerarse como la suma de tres modelos ARIMA – para la tendencia, estacionalidad y componente irregular – ninguno de los cuales se observa directamente.

2. Procesos Estocásticos

2.1. El análisis de series temporales presume que la serie que se va a predecir ha sido generada por un proceso estocástico (o aleatorio), cuya estructura es susceptible de caracterización y descripción. En otras palabras, un modelo de series temporales proporciona una descripción de la naturaleza del proceso – estocástico – que generó la muestra de observaciones objeto de estudio. La descripción no se realiza en términos de una relación de causa – efecto, como ocurre en los modelos estructurales, sino en términos de la forma en que la aleatoriedad está incorporada al proceso.

2.2. Proceso estocástico significa que cada valor de la serie infinita se extrae aleatoriamente de una distribución de probabilidad. Para generalizar, se supondrá que la serie

$$\{Y_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

es un conjunto de variables aleatorias distribuidas conjuntamente, es decir, que existe alguna función de distribución

$$p(\{Y_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\})$$

Que asigna probabilidades a todas las posibles combinaciones de valores de $\{Y_t\}$.

Si se pudiera de alguna forma especificar numéricamente la función de distribución correspondiente a esta serie, se podría realmente determinar la probabilidad de un resultado futuro. Lamentablemente, la especificación completa de la función de distribución correspondiente a una serie temporal es casi siempre imposible.

2.3. Sin embargo, generalmente es posible construir un modelo simplificado que explique la aleatoriedad de la serie de una forma que resulte útil para pronosticar. Por ejemplo, se puede creer que los valores de $\{Y_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ están correlacionados entre sí según un proceso de Markov de primer orden. La verdadera distribución de $\{Y_t\}$ puede ser en realidad mucho más complicada, pero este modelo sencillo puede constituir una aproximación razonable a la misma. Evidentemente la utilidad de un modelo de este tipo dependerá de cuanto se aproxime a la verdadera distribución de probabilidad y, por tanto, al verdadero comportamiento aleatorio de la serie. Obsérvese que el modelo no tiene porqué describir perfectamente – y generalmente no lo hará – el verdadero comportamiento pasado de la serie, puesto que tanto la serie como el modelo son estocásticos. Bastará con que el modelo capte las características aleatorias de la serie.

Ejemplo 1. EL PROCESO DE RECORRIDO O PASEO ALEATORIO

Este proceso es una serie temporal estocástica que ha sido utilizada con frecuencia como modelo para las cotizaciones de bolsa. Como es evidente, existen muy pocas series que sean realmente procesos de recorrido aleatorio, pero existen bastantes para las que un modelo de recorrido aleatorio constituye una buena aproximación. En el proceso de paseo aleatorio más simple, cada uno de los cambios sucesivos de $\{\mu_t\}$ se extrae independientemente de una distribución con media igual a cero. Por tanto, $\{\mu_t\}$ se determina mediante,

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \varepsilon_t$$

siendo, $E(\varepsilon_t) = 0$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 \quad \forall t \neq s$$

Para efectuar un pronóstico sobre la base de este recorrido aleatorio conociendo su historia, es decir dado $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$ se desea obtener una predicción. Dicha predicción viene dada por

$$\hat{\mu}_{t+1} = E[\mu_{t+1} / \mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1]$$

Pero, ε_{t+1} es independiente de $[\mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1]$. Por tanto, el pronóstico para el período siguiente es simplemente,

$$\hat{\mu}_{t+1} = \mu_t + E[\varepsilon_t] = \mu_t$$

El pronóstico para el período $t+2$, es

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{t+2} &= E[\mu_{t+2} / \mu_t, \dots, \mu_1] = \\ &= E[\mu_{t+1} + \varepsilon_{t+2}] = \\ &= E[\mu_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}] = \mu_t \end{aligned}$$

Del mismo modo, el pronóstico para el período $t+l$ es también μ_t .

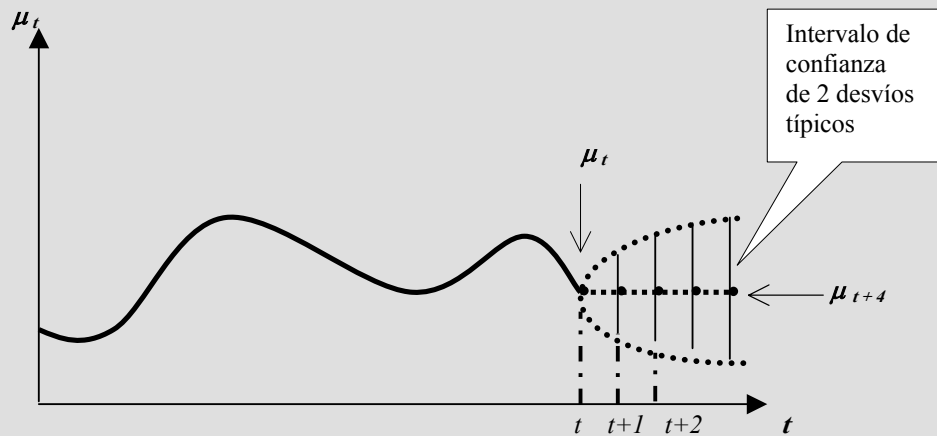


fig. 2.1. “PREDICCIÓN DE UN RECORRIDO ALEATORIO”

Aunque la predicción $\hat{\mu}_{t+l}$ será siempre igual sea cual sea l , la varianza del error de predicción aumentará a medida que aumenta l . Para el pronóstico correspondiente al período $t+l$, el error de predicción viene dado por,

$$\begin{aligned} e_1 &= \mu_{t+1} - \hat{\mu}_{t+1} = \\ &= \mu_t + \varepsilon_{t+1} - \mu_t = \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

y su varianza es,

$$E[\varepsilon_{t+l}^2] = \sigma_\varepsilon^2$$

Para el pronóstico correspondiente al período $t+2$,

$$e_2 = \mu_{t+2} - \hat{\mu}_{t+2} =$$

$$= \mu_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} - \mu_t = \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$$

y su covarianza es,

$$E[(\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2})^2] = E[\varepsilon_{t+1}^2] + E[\varepsilon_{t+2}^2] + 2E[\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t+2}] = 2\sigma_\varepsilon^2$$

Puesto que, $2E[\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t+2}] = 0$ por ser términos independientes.

Igualmente para la predicción correspondiente al período l , la varianza del error es $l\sigma_\varepsilon^2$. Por tanto, el error tipo de predicción aumenta con \sqrt{l} . De esta forma se pueden obtener intervalos de confianza para las predicciones, intervalos cuya amplitud será cada vez mayor a medida que aumenta el horizonte de predicción. Todo lo anterior se ilustra en la *fig. 2.1*. Obsérvese que las predicciones $\hat{\mu}_{t+1}, \hat{\mu}_{t+2}$, etc., son todas iguales a la última observación μ_t , pero los intervalos de confianza son cada vez mayores a medida que aumenta la \sqrt{l} .

2.4. La determinación de las características de un proceso a partir de las funciones de distribución conjunta es en general un procedimiento complicado, por lo que se acostumbra a utilizar preferentemente el método de los momentos. Como momento de primer orden se utiliza la media y como momentos de segundo orden, además, de la varianza, las covarianzas entre variables definidas en distintos períodos de tiempo o autocovarianzas. Como forma alternativa se utilizan los coeficientes de autocorrelación. Las autocorrelaciones conjuntamente con las varianzas proporcionan idéntica información que las autocovarianzas. Sin embargo, es preferible utilizar las autocorrelaciones ya que estas proporcionan unidades de medida reducidas a una misma escala. La caracterización de un proceso estocástico mediante los momentos de primero y segundo orden es en principio más incompleta que cuando se hace mediante funciones de distribución.

2.5. En el contexto de procesos estocásticos, cabe preguntarse, ¿Cómo se conceptualizaría una serie de tiempo? Aunque en una serie temporal se dispone de una observación para cada período de tiempo, no se obtiene, en general, en forma determinista como sería el caso de una función exacta del tiempo. Una serie temporal casi siempre tendrá un carácter aleatorio, y se puede interpretar como una muestra de tamaño uno tomada en períodos sucesivos de tiempo en un proceso estocástico. En este sentido, *se la considera como una realización de un proceso estocástico*. A diferencia del muestreo aleatorio simple donde cada extracción es independiente de las demás, en una serie temporal el dato extraído para el período actual no será, en general, independiente de los datos extraídos en períodos pretéritos.

2.6. La información que se maneja en economía adopta en muchos casos la forma de serie temporal. En general, en Ciencias Sociales la información de una serie se obtiene mediante *observación pasiva* sin control de los factores que influyen sobre la variable objeto de investigación. Por lo tanto, aunque se disponga de una

serie larga, debe considerarse toda ella como una sola realización de un proceso estocástico. Por ello el problema es bastante complicado, ya que el número de datos que se obtiene en una sola realización se debe usar para estimar un número importante de parámetros. Así, si se dispone de t datos – t períodos – con ellos se debe estimar t medias y t varianzas, sin contar las autocovarianzas que también se necesitan para caracterizar el proceso estocástico. O sea, tal como se ha planteado el problema, en las paginas anteriores, no se podría arribar a una solución, salvo que se impongan algunas restricciones al proceso, para poder a partir de una sola realización, efectuar inferencias sobre él mismo. Las restricciones son que sea *estacionario y ergódico*.

3. Estacionariedad

3.1. Al comenzar a desarrollar modelos de series temporales, se debe saber si se puede suponer que el proceso estocástico subyacente generado por una serie temporal es invariante con respecto al tiempo. Si las características del proceso estocástico cambian a lo largo del tiempo, es decir, si el proceso es no estacionario, resultará, a menudo, difícil representar la serie temporal para intervalos de tiempo pasados y futuros mediante un modelo algebraico sencillo. Por ejemplo, el recorrido aleatorio o paseo aleatorio con dirección constituye un caso de proceso estocástico no estacionario para el cual es posible construir un modelo sencillo de predicción.

Ejemplo 2. PASEO ALEATORIO CON DIRECCIÓN.

Es una variación sencilla del proceso de recorrido aleatorio analizado en el ejemplo 1. La diferencia es que tiene en cuenta la existencia de una tendencia – creciente o decreciente – en la serie $\{\mu_t\}$ y permite incluir esta tendencia en la predicción. En este proceso $\{\mu_t\}$ se determina mediante,

$$\mu_t = \mu_{t-1} + d + \varepsilon_t$$

De forma que, por término medio, el proceso tenderá a desplazarse hacia arriba (para $d > 0$). La predicción para el período $t + l$, es

$$\hat{\mu}_{t+l} = E[\mu_{t+l} / \mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1] = \mu_t + d$$

y para el período $t + l$

$$\hat{\mu}_{t+l} = \mu_t + ld$$

La desviación típica de la predicción será la misma que en el ejemplo 1. Para el período $t + l$, igual que antes,

$$\begin{aligned} e_1 &= \mu_{t+1} - \hat{\mu}_{t+1} = \\ &= \mu_t + d + \varepsilon_{t+1} - \mu_t - d = \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

El proceso junto con las predicciones y los intervalos de confianza asociados se representa en la figura 3.1. Como puede verse, las predicciones aumentan linealmente a medida que aumenta l , y la desviación típica de la predicción aumenta a medida que lo hace la raíz cuadrada de l .

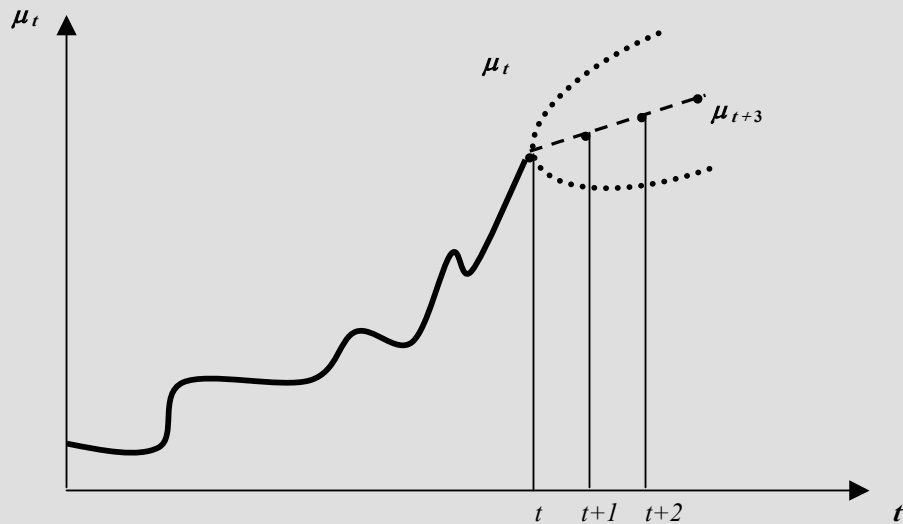


Fig. 3.1. "PREDICCIÓN DE PASEO ALEATORIO CON DIRECCIÓN"

Por lo tanto, el paseo aleatorio con dirección es claramente no estacionario.

3.2. Por otra parte, si el proceso estocástico permanece fijo en el tiempo, es decir es estacionario, entonces es posible construir un modelo para el proceso mediante una ecuación con coeficientes fijos que pueden estimarse a partir de datos observados. Este modelo es análogo al modelo de regresión uniecuacional. En cambio, si la relación estructural se modifica en el transcurso del tiempo, es decir no es estacionario, no se podrían aplicar las técnicas conocidas hasta aquí. Pero, además de la estacionariedad, es necesario que un proceso estocástico sea *ergódico*, con el objeto de que el proceso de inferencia pueda realizarse de una forma adecuada. En forma intuitiva la propiedad de ergodicidad permite obtener estimadores consistentes y se verifica en el límite, cuando k tiende a infinito – siendo k el número de retardos considerado – la función de autocorrelación se anula. Entonces, cuando un proceso es estacionario y ergódico todo el problema de inferencia se simplifica de forma considerable. Ahora bien, puede afirmarse que las series económicas – salvo rara excepciones – no son estacionarias. A la vista de esto, una conclusión inmediata podría ser que para un economista tiene poco interés la utilización de procesos estocásticos estacionarios. Pero en realidad no es así, pues mediante sencillas transformaciones en la mayor parte de los casos las series económicas se pueden convertir en series aproximadamente estacionarias, siendo entonces aplicable el proceso de inferencia correspondiente a procesos de este tipo.

3.3. Específicamente se supone que los procesos estocásticos se mantienen en equilibrio en torno a un nivel medio constante. La probabilidad de una fluctuación dada del proceso con respecto a dicho nivel medio se supone que es la misma en cualquier *instante del tiempo*. En otras palabras, se supone que las propiedades estocásticas del proceso estacionario *no varían en el tiempo*. Cualquier serie temporal $\{Y_t\}$ puede considerarse que ha sido generada por un conjunto de variables aleatorias con función de distribución $p(Y_1, \dots, Y_t)$. De la misma forma una observación futura $\{Y_{t+1}\}$ puede considerarse como generada por una función de distribución condicionada $p(Y_{t+1} / Y_1, \dots, Y_t)$. Esto es, una función de distribución de $\{Y_{t+1}\}$ dadas las observaciones pretéritas Y_1, \dots, Y_t . Este resultado se denomina *realización*. Así la serie Y_1, \dots, Y_t representa una realización particular del proceso estocástico representado por la distribución de probabilidad $p(Y_1, \dots, Y_t)$.

3.4. Se establecerá que un proceso estocástico es estacionario cuando su distribución conjunta y su distribución condicionada son invariantes con respecto a un desplazamiento en el tiempo. Entonces, si la serie es estacionaria,

$$p(Y_t, \dots, Y_{t+k}) = p(Y_{t+m}, \dots, Y_{t+m+k})$$

y,

$$p(Y_t) = p(Y_{t+m})$$

para todo t, k y m .

Obsérvese que si la serie es estacionaria, la media de la serie definida por

$$E(Y_t) = \mu$$

deberá ser también estacionaria, de forma que $E(Y_t) = E(Y_{t+m})$, para todo t y m . Además, la varianza de la serie,

$$V(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2$$

deberá ser estacionaria, de forma que $E(Y_t - \mu)^2 = E(Y_{t+m} - \mu)^2$, y por último, para cualquier retardo k , la covarianza de la serie,

$$\gamma_k = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = E\{(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)\}$$

deberá ser también estacionaria, de forma que $\text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \text{Cov}(Y_{t+m}, Y_{t+m+k})$.

3.5. Es posible que la media, la varianza y las covarianzas sean estacionarias, pero no así la distribución de probabilidad conjunta. Si las distribuciones de probabilidad son estacionarias entonces la serie es estacionaria en *sentido estricto*. En cambio, si solo son estacionarias la media, la varianza y la covarianza, entonces la serie es estacionaria en *sentido amplio*. Nótese que la estacionariedad en sentido estricto implica la

estacionariedad en sentido amplio, pero no la inversa. Si el proceso estocástico es *normal* queda caracterizado por los dos primeros momentos y si estos son estacionarios, se dice que es estacionario en sentido estricto.

3.6. La media y la varianza de un proceso estocástico estacionario –serie temporal estacionaria– son constantes. Si se considera $k = 1$, Y_{t+1+m} y Y_{t+1} tienen la misma distribución, según 3.4. Por lo tanto, $E(Y_t) = \mu$ y $V(Y_t) = \sigma^2$, son independientes del tiempo. De la misma forma, la autocovarianza de un proceso estacionario es independiente del tiempo y depende solo del lapso transcurrido entre dos períodos. Para demostrar esta propiedad, se considera $k = 2$, entonces Y_{t+1+m} y Y_{t+2+m} tienen la misma distribución conjunta que Y_{t+1} y Y_{t+2} , de acuerdo a 3.4. Definiendo $t + 1 + m = t$ y $t + 2 - t + 1 = s$, se tiene que $t + 2 + m = s + t$. Por lo tanto, la distribución conjunta de Y_t, Y_{t+s} es la misma que la de $Y_{t+1}, Y_{t+1+s} \forall t, t + 1, s$. Así, la autocovarianza

$$Cov(Y_t, Y_{t+s}) = \gamma_s$$

depende solo de la longitud del retardo s . Considerada como una función de s , se tendrá la *función de autocovarianza*. Además, es una función par, debido a que

$$Cov(Y_t, Y_{t+s}) = Cov(Y_t, Y_{t-s})$$

y, por tanto, $\gamma_s = \gamma_{-s}$. Esto significa que solo se necesita especificar esta función para $s = 0, 1, 2, \dots$. Como puede verse, la autocovarianza es simplemente la autocovarianza de orden 0.

3.7. La determinación de las características de un proceso estocástico puede hacerse mediante dos formas alternativas, o bien a partir de funciones de distribución o bien a partir de los momentos. Mientras que generalmente resulta imposible obtener una descripción completa de un proceso estocástico – es decir, especificar realmente las distribuciones de probabilidad - la *función de autocorrelación* resulta al extremo útil para ayudar a obtener una descripción del proceso de cara a la construcción de un modelo. La función de autocorrelación proporciona una medida cuantitativa de la correlación que existe entre observaciones contiguas de la serie $\{Y_t\}$. Se define la función de autocorrelación con retardo s como,

$$\rho_s = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+s})}{\sqrt{V(Y_t)V(Y_{t+s})}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

A partir de la definición se puede ver que la función de autocorrelación es simétrica, es decir que la correlación para un desplazamiento positivo es igual a la correlación para un desplazamiento negativo de la misma magnitud, de forma que $\rho_s = \rho_{-s}$.

3.8. Por tanto, cuando se dibuja una función de autocorrelación – es decir, cuando se representa gráficamente ρ_s para diferentes valores de s – se obtiene un *correlograma* donde basta considerar únicamente valores positivos de s . La función de autocorrelación puede utilizarse para probar si una serie es o no estacionaria. Si ρ_s disminuye rápidamente a medida que aumenta s , este comportamiento indica que la serie es estacionaria.

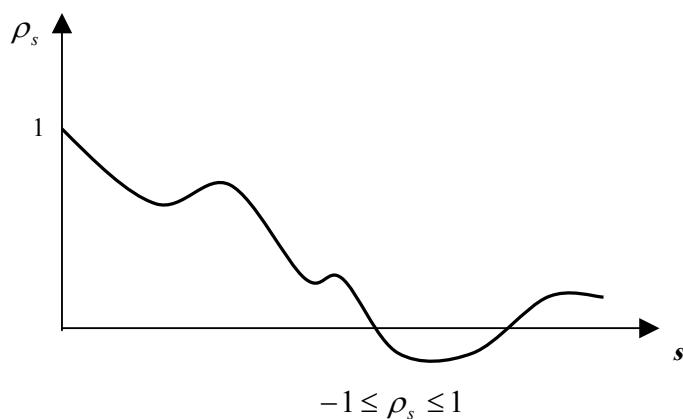


Fig. 3.2. "CORRELOGRAMA DE UNA SERIE ESTACIONARIA"

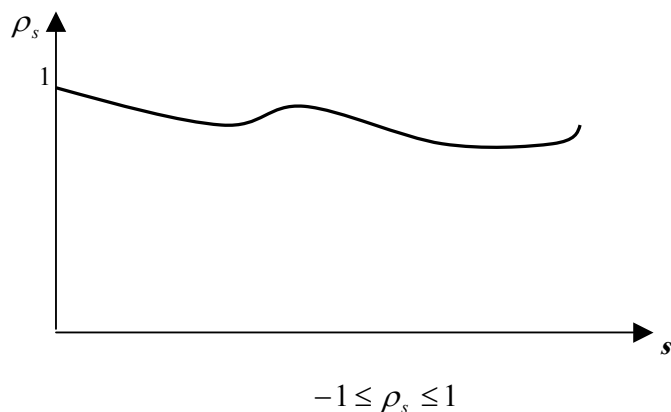


Fig. 3.3. "CORRELOGRAMA DE UNA SERIE NO ESTACIONARIA"

3.9. Se verán a continuación un conjunto de condiciones que debe reunir la función de autocorrelación de un proceso estacionario. Sea $\{Y_t\}$ un proceso estacionario y sea L_t una función lineal cualquiera de $\{Y_t\}$, por ejemplo,

$$L_t = \alpha_1 Y_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \cdots + \alpha_s Y_{t-s}$$

puesto que $\{Y_t\}$ es un proceso estacionario, las covarianzas son estacionarias - independientes del tiempo -,

$$\text{Cov}(Y_{t+i}, Y_{t+j}) = \gamma_{|i-j|}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado se obtiene la varianza de L_t ,

$$V(L_t) = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t \alpha_i \alpha_j \gamma_{|i-j|}$$

Si las α no son todas iguales a cero, la varianza de L_t deberá ser mayor que cero y, por lo tanto, deberá verificarse $\forall i, j$ que,

$$\gamma_{|i-j|} > 0 \text{ para } i = j$$

Para t observaciones las covarianzas de $\{Y_t\}$ son,

$$\Gamma_t = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{t-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{t-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{t-3} \\ & & & \ddots & \\ \gamma_{t-1} & \gamma_{t-2} & \gamma_{t-3} & & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Es una matriz de autocovarianzas con elementos iguales en la diagonal principal. Debe ser definida positiva, puesto que los elementos no diagonales de la misma son no negativos. Multiplicando Γ por $1/\gamma_0$ se obtiene,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{t-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{t-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{t-3} \\ & & & \ddots & \\ \rho_{t-1} & \rho_{t-2} & \rho_{t-3} & & 1 \end{bmatrix}$$

Que es la matriz de autocorrelación, también definida positiva. Por tanto, el determinante de R y sus menores principales tienen que ser mayores que cero. Por ejemplo, para $t = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

lo que implica que $1 - \rho_1^2 > 0$ de modo que, $-1 \leq \rho_1 \leq 1$. De forma similar, para $t = 3$ es fácil demostrar las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned} -1 &\leq \rho_1 \leq 1 \\ -1 &\leq \rho_2 \leq 1 \\ -1 &\leq \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \leq 1 \end{aligned}$$

Que se deducen de la propiedad de matriz definida positiva, lo que implica que todos los menores principales son no negativos – condición necesaria y suficiente -, de esta forma,

$$\begin{aligned}
 |1| > 0; \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 - \rho_1^2 \Rightarrow |\rho_1| \leq 1 \\
 \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 + \rho_1^2 \rho_2 + \rho_1^2 \rho_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1^2 = \\
 &= 1 - \rho_1^2 - \rho_1(\rho_1 - \rho_1 \rho_2) + \rho_2(\rho_1^2 - \rho_2) \geq 0 \\
 \therefore \underbrace{(1 - \rho_2)}_{\geq 0} (1 - 2\rho_1^2 + \rho_2) &\geq 0 \Rightarrow 1 - 2\rho_1^2 + \rho_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\rho_2 \geq 2\rho_1^2 - 1$$

3.10. La *función de autocorrelación parcial* de un proceso estocástico $\{Y_t\}$ es una función que para cada instante t y cada entero s toma un valor igual a la correlación entre Y_t y Y_{t+s} , ajustada por el efecto de los retardos intermedios $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+s-1}$, esto es

$$\rho_s = \text{cor}(Y_t, Y_{t+s} / Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+s-1})$$

y se denomina $s-1$ -ésima autocorrelación parcial.

3.11. El gran interés de un proceso estocástico estacionario reside en que las funciones de autocovarianza, de autocorrelación y de autocorrelación parcial son independientes del tiempo t , por lo que puede omitirse dicho argumento temporal. Lo que es crucial es que dicha invarianza permite la estimación muestral de tales funciones. En general, parte de la correlación existente entre Y_t y Y_{t+2} estará producida por el hecho de que ambas están correlacionadas con Y_{t+1} , y eso es lo que trata de corregir la función de autocorrelación parcial.

El primer valor de la función de autocorrelación parcial es la correlación entre Y_t y Y_{t+1} sin que haya que corregir por ningún retardo intermedio, puesto que no existen. Por eso es que el primer valor de las funciones de autocorrelación parcial y de autocorrelación coincide. De manera análoga, el valor inicial de la función de autocorrelación es igual a 1 en todo proceso estacionario, por ser el cociente de la varianza del proceso – constante en el tiempo – por sí misma. Por un razonamiento igual al anterior, se concluye que el

valor inicial de la función de autocorrelación parcial es asimismo igual a 1 en todo proceso estacionario. Como ejemplo de autocorrelación parcial sean x_1, x_2 y x_3 , entonces

$$cor(x_1, x_2 / x_3) = \rho_{12 \cdot 3} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{1 - \rho_{13}^2} \sqrt{1 - \rho_{23}^2}}$$

Sí $s = 2$, $x_1 = Y_t$, $x_2 = Y_{t+2}$ y $x_3 = Y_{t+1} \therefore \rho_{12} = \rho_2$, $\rho_{13} = \rho_1$ y $\rho_{23} = \rho_1$

De donde,

$$\rho_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \text{ y } -1 \leq \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \leq 1$$

por ser una correlación, lo que implica que, $2\rho_1^2 - 1 \leq \rho_2 \leq 1$

3.12. La función de autocorrelación se estima a partir de la *función de autocorrelación muestral*,

$$r_s = \hat{\rho}_s = \frac{\hat{\rho}_s}{\hat{\rho}_0} = \frac{\frac{1}{t-s} \sum_{t=s+1}^t (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-s} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{1}{t} \sum_{t=1}^t (Y_t - \bar{Y})^2} \sqrt{\frac{1}{t-s} \sum_{t=s+1}^t (Y_{t-s} - \bar{Y})^2}}$$

Distintas simplificaciones se consiguen de esta expresión cuando el tamaño muestral t es grande con respecto a s , pues entonces dividir por t o por $t-s$ es prácticamente lo mismo, en cuyo caso todos los cocientes de la forma $1/t$ o $1/(t-s)$ pueden eliminarse. Por otra parte, las medias muestrales de $(Y_t - \bar{Y})^2$ sobre las observaciones $1, 2, \dots, t$, o sobre las observaciones $s+1, s+2, \dots, t$ serán muy similares. Con estas aproximaciones se tiene el estimador,

$$r_s = \frac{\sum_{t=s+1}^t (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-s} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^t (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Esta última garantiza que el valor estimado de $\hat{\rho}_0$ será siempre igual a 1.

EJEMPLO 3. VERIFICACIÓN DE LA ESTACIONARIEDAD

Dado el siguiente proceso estocástico, hay que verificar su estacionariedad,

$$Y_t = \alpha \cos \lambda t + \beta \sin \lambda t$$

Donde, $\alpha \sim N(0, \sigma^2)$, $\beta \sim N(0, \sigma^2)$ y α, β son independientes.

$$a) E(Y)_t = E(\alpha) \cos \lambda t + E(\beta) \sin \lambda t = 0$$

$$\begin{aligned} b) E(Y_t Y_{t+s}) &= E[(\alpha \cos \lambda t + \beta \sin \lambda t)(\alpha \cos \lambda(t+s) + \beta \sin \lambda(t+s))] \\ &= E[\alpha^2 \cos \lambda t \cos \lambda(t+s) + \beta^2 \sin \lambda t \sin \lambda(t+s) + \alpha\beta \cos \lambda t \sin \lambda(t+s) + \\ &\quad + \alpha\beta \sin \lambda t \cos \lambda(t+s)] \\ &= V(\alpha)[\cos \lambda t \cos \lambda(t+s)] + V(\beta)[\sin \lambda t \sin \lambda(t+s)] + Cov(\alpha\beta)[\cos \lambda t \sin \lambda(t+s) + \\ &\quad + \sin \lambda t \cos \lambda(t+s)] \\ &= V(\alpha)[\cos \lambda t \cos \lambda(t+s)] + V(\beta)[\sin \lambda t \sin \lambda(t+s)] + Cov(\alpha\beta)[\sin \lambda(t+t+s)] \end{aligned}$$

pero,

$$2 \cos \lambda t \cos \lambda(t+s) = \cos \lambda s + \cos \lambda(2t+s)$$

$$\text{y } 2 \sin \lambda t \sin \lambda(t+s) = \cos \lambda s - \cos \lambda(2t+s)$$

$$\begin{aligned} \therefore E(Y_t Y_{t+s}) &= V(\alpha)\left[\frac{1}{2}(\cos \lambda s + \cos \lambda(2t+s))\right] + V(\beta)\left[\frac{1}{2}(\cos \lambda s - \cos \lambda(2t+s))\right] + \\ &\quad + Cov(\alpha\beta)[\sin \lambda(2t+s)] \\ &= V(\alpha)\frac{1}{2}\cos \lambda s + V(\alpha)\frac{1}{2}\cos \lambda(2t+s) + V(\beta)\frac{1}{2}\cos \lambda s - V(\beta)\frac{1}{2}\cos \lambda(2t+s) + \\ &\quad + Cov(\alpha\beta)\sin \lambda(2t+s) \\ &= \frac{1}{2}[V(\alpha) + V(\beta)]\cos \lambda s + \frac{1}{2}[V(\alpha) - V(\beta)]\cos \lambda(2t+s) + Cov(\alpha\beta)\sin \lambda(2t+s) \end{aligned}$$

De acuerdo a la distribución y condición de independencia de α y β ,

$$E(Y_t Y_{t+s}) = \frac{1}{2}[\sigma^2 + \sigma^2]\cos \lambda s + \frac{1}{2}[\sigma^2 - \sigma^2]\cos \lambda(2t+s) + 0 = (\cos \lambda s)\sigma^2$$

Por lo tanto, el proceso es estacionario con,

$$E(Y_t) = 0$$

$$E(Y_t Y_{t+s}) = (\cos \lambda s)\sigma^2$$

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \cos \lambda s$$

4. Procesos Lineales

4.1. Hay una clase especial de procesos estacionarios y ergódicos que son los procesos lineales. Estos se caracterizan porque se pueden representar como una combinación lineal de variables aleatorias. Se van a examinar los siguientes tipos de modelos lineales:

procesos puramente aleatorios

procesos autorregresivos

procesos de medias móviles

procesos mixtos

4.2. El *proceso puramente aleatorio* se puede expresar de la siguiente forma,

$$Y_t = \varepsilon_t$$

Donde ε_t satisface las siguientes propiedades:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall t$$

$$E(\varepsilon_t)^2 = \sigma^2 \quad \forall t$$

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s}) = 0 \quad \forall t, s$$

Esto es, la media del proceso es nula y su varianza constante a lo largo del tiempo y no existe relación entre valores referidos a momentos distintos de tiempo. En el tratamiento de series temporales se suele denominar a este proceso con el nombre de “ruido blanco”. Esta denominación proviene del campo de las telecomunicaciones pues el ruido de fondo presente en una línea telefónica no tiene ninguna estructura probabilística y su espectro es plano como el de la luz blanca.

De ahora en adelante, siempre se supondrá que ε_t será una variable aleatoria con las propiedades enunciadas.

Naturalmente al no existir una relación entre valores referidos a momentos distintos de tiempo, el “ruido blanco” está alejado de la concepción del proceso estocástico, pero es un elemento clave en la construcción de modelos más complicados como los que se verán a continuación.

4.3. El *proceso autorregresivo de orden p*, $AR(p)$ se expresa de la siguiente forma,

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Como puede verse en un modelo $AR(p)$ aparece un ruido blanco referido al momento actual y la variable desfasada para distintos periodos, siendo p el retardo máximo que aparece en el proceso estocástico. La denominación de autorregresivo procede de que Y_t se obtiene mediante regresión sobre los valores desfasados de la propia variable. Los procesos autorregresivos fueron introducidos por Yule en 1927.

4.4. Un *proceso de medias móviles de orden q*, $MA(q)$ viene dado por,

$$Y_t = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-1} - \Theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \Theta_q \varepsilon_{t-q}$$

La expresión de medias móviles hace referencia a que la variable Y_t se obtiene como un promedio de variables ruido blanco $(q+1)$, siendo las Θ_i los coeficientes de ponderación. Como las variables que forman parte de este promedio varían a lo largo del tiempo, reciben el nombre de medias móviles. Estos procesos también se deben a Yule (1926).

4.5. Como una combinación de los dos procesos anteriores Box y Jenkins (1976) introducen el *proceso ARMA* (p, q) que viene dado por,

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \Theta_q \varepsilon_{t-q}$$

O sea, una combinación de un proceso autorregresivo y de medias móviles.

4.6. El estudio de estos tipos de procesos se debe a que en el año 1938 el profesor Wold enunció y demostró el teorema que dice que cualquier proceso estacionario Y_t puede representarse unívocamente como la suma de dos procesos mutuamente incorrelacionados,

$$Y_t = D_t + X_t$$

Donde D_t es linealmente determinista y X_t es un proceso $MA(\infty)$. En contraposición al proceso determinista, a la parte de medias móviles se le denomina puramente no determinista. La parte determinista puede ser una función exacta del tiempo, por ejemplo

$$D_t = A \cos(\omega t)$$

la cual describe una oscilación sinusoidal a lo largo del tiempo. El caso más simple consistiría en hacer la parte determinista igual a una constante.

De acuerdo al teorema de Wold la representación $Y_t = D_t + X_t$ se aplica a *cualquier* proceso estacionario, sea o no lineal. Si dejamos a un lado la parte determinista, la parte no determinista se representa mediante un proceso que no se puede utilizar en la práctica pues tiene infinitos retardos. Sin embargo, es razonable esperar que muchos procesos estacionarios se puedan aproximar mediante un MA con un número no muy elevado de retardos. En la aproximación de un $MA(\infty)$ se puede utilizar un AR o un ARMA finito, según se verá más adelante.

4.6. El tratamiento de los modelos queda simplificado con la utilización de los operadores de diferencias y de retardos. El *operador de diferencias* (Δ) aplicado a una variable referida a un momento de tiempo tiene el siguiente efecto,

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Abreviadamente se dice que se han calculado las primeras diferencias. Si se aplica el operador (Δ) a ΔY_t , se obtiene,

$$\Delta^2 Y_t = \Delta[\Delta Y_t] = \Delta[Y_t - Y_{t-1}] = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = [Y_t - Y_{t-1}] - [Y_{t-1} - Y_{t-2}]$$

Y se denomina segundas diferencias. Por lo que el exponente a que se eleva (Δ) indica el orden de retardo. Por ejemplo,

t	Y_t	ΔY_t	$\Delta^2 Y_t$	$\Delta^3 Y_t$	$\Delta^4 Y_t$
1	423	-	-	-	-
2	432	9	-	-	-
3	477	45	36	-	-
4	450	-27	-72	-108	-
5	430	-20	7	79	187

Puede observarse que en cada diferenciación se pierde un dato. Hay que distinguir entre el operador de diferencias para periodos consecutivos Δ^s del operador aplicado para obtener diferencias entre intervalos mayores, por ejemplo 4 en datos trimestrales, 12 en mensuales, etc. y se simboliza Δ_s .

El *operador de retardos* (B) aplicado a una variable Y_t significa que se retarda en 1 período el subíndice, es decir

$$BY_t = Y_{t-1}$$

Por lo que, $B^2 Y_t = Y_{t-2}$ y $B^0 Y_t = Y_t \Rightarrow B^0 = 1$, es el operador de retardos identidad. En general,

$$B^k Y_t = Y_{t-k}$$

Pero también, tiene propiedades algebraicas, ya que

$$\begin{aligned} B(aY_t) &= aBY_t = aY_{t-1} \\ B^k B^s(Y_t) &= B^{k+s} Y_t = Y_{t-k-s} \end{aligned}$$

La relación entre el operador de retardos y el de diferencias es inmediata, ya que

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - B \\ \Delta Y_t &= Y_t - Y_{t-1} = Y_t - BY_t = (1 - B)Y_t \end{aligned}$$

Y también, el operador de retardos se relaciona con el operador estacional de diferencias,

$$\Delta_s = 1 - B^s$$

$$\Delta_{12} Y_t = Y_t - Y_{t-12} = (1 - B^{12}) Y_t$$

Y aplicándolo al siguiente modelo con retardos,

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \dots - \Phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t$$

Se obtiene,

$$[1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p] Y_t = \varepsilon_t$$

Donde la expresión entre corchetes es el *operador polinomial de retardos* y se designa por $\Phi(B)$, por lo que el modelo con retardos se puede expresar como,

$$\Phi(B) Y_t = \varepsilon_t$$

y, $\Phi(B) Y_t = 0$ es la *ecuación polinomial*.

EJEMPLO 4. APLICACIÓN DE LOS OPERADORES.

Si se considera el modelo de medias móviles $MA(\infty)$,

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} [\Phi B]^j \varepsilon_t$$

en caso de que $|\Phi| < 1$, y tomando $|B| \leq 1$, el factor que precede a ε_t es la suma de infinitos términos de una progresión geométrica convergente. Por tanto,

$$Y_t = \frac{1}{1 - \Phi B} \varepsilon_t$$

Eliminando el denominador, queda

$$(1 - \Phi B) Y_t = \varepsilon_t$$

que es un modelo $AR(1)$. Así pues, se puede considerar que el modelo $MA(\infty)$ es simplemente una transformación del modelo $AR(1)$, siempre que $|\Phi| < 1$.

4.7. Es inmediato la aplicación de estos operadores a las *ecuaciones ordinarias en diferencia finitas con coeficientes constantes*. O sea, aquellas en donde la función desconocida depende sólo de un argumento, el tiempo. En los modelos de series temporales se usan sólo las ecuaciones ordinarias en diferencias finitas lineales con coeficientes constantes. Por ejemplo

$$a_0 \Delta^p Y_t + a_1 \Delta^{p-1} Y_t + \dots + a_{p-1} \Delta Y_t + a_p Y_t = h(t)$$

Una ecuación en diferencias finitas también puede expresarse utilizando variables retardadas, así de la ecuación

$$a_0 Y_t + a_1 \Delta Y_t + a_2 \Delta^2 Y_t = h(t)$$

se tiene,

$$\begin{aligned} a_0 Y_t + a_1 [Y_t - Y_{t-1}] + a_2 [(Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2})] &= h(t) \\ (a_0 + a_1 + a_2) Y_t + (-a_1 - 2a_2) Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} &= h(t) \end{aligned}$$

haciendo,

$$b_0 = (a_0 + a_1 + a_2)$$

$$b_1 = (-a_1 - 2a_2)$$

$$b_2 = a_2$$

se obtiene

$$b_0 Y_t + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} = h(t)$$

Esta es la formulación que se utilizará de ahora en más. Es inmediato que una ecuación de orden p vendría dada por,

$$b_0 Y_t + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + \dots + b_p Y_{t-p} = h(t)$$

Dividiendo ambos miembros por b_0 y haciendo, $\Phi_i = -b_i / b_0 \forall i = 1, 2, \dots, p$ se obtiene una formulación normalizada (caracterizada por que el coeficiente de Y_t es 1),

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \dots - \Phi_p Y_{t-p} = g(t)$$

donde, $g(t) = h(t) / b_0$

Utilizando el operador de retardos,

$$[1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p] Y_t = g(t)$$

$$\Phi(B) Y_t = g(t)$$

Que es la ecuación ordinaria en diferencias finitas lineal y con coeficientes constantes no homogénea. Siendo su versión homogénea,

$$\Phi(B) Y_t = 0$$

Que no es otra cosa que la ecuación polinomial obtenida en el último párrafo de 4.6.

La solución de la ecuación ordinaria será, como es conocido, una *solución general* – función del tiempo – formada por una *integral particular* y una *función complementaria*. Por lo que la solución general será una función del tiempo $f(t)$ que satisfaga la ecuación polinomial, como

$$Y_t = \lambda^t$$

Para ver si es una solución adecuada, se sustituye en la ecuación polinomial

$$\lambda^t - \Phi_1 \lambda^{t-1} - \dots - \Phi_p \lambda^{t-p} = 0$$

$$\lambda^{t-p} [\lambda^p - \Phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \Phi_p] = 0$$

Dejando de lado la solución trivial ($\lambda = 0$) se pueden obtener p raíces ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$) de la ecuación entre corchetes, que satisfarán la ecuación en diferencias y que se denomina *ecuación característica*.

Se puede demostrar que $\lambda_i = 1/B_i$ será una solución, con lo que

$$[1/B_i]^p - \Phi_1 [1/B_i]^{p-1} - \dots - \Phi_p = 0$$

Por otra parte, $Y_t = \lambda_i^t$ es la solución básica de la ecuación en diferencias. Entonces para obtener la solución general se enunciarán dos teoremas.

TEOREMA 1. Si λ_i^t es una solución y A_i es una constante arbitraria, entonces $Y_t = A_i \lambda_i^t$ es también una solución.

En efecto, recordando que $Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \dots - \Phi_p Y_{t-p} = 0$, se obtiene

$$A_i \lambda_i^{t-p} [\lambda_i^p - \Phi_1 \lambda_i^{p-1} - \dots - \Phi_p] = 0$$

Ya que la expresión entre corchetes es igual a 0 como se vio antes. En consecuencia, $A_1 \lambda_1^t, A_2 \lambda_2^t, \dots, A_m \lambda_m^t$ donde A_1, A_2, \dots, A_m son constantes arbitrarias, son también soluciones a la ecuación homogénea.

TEOREMA 2. Si λ_i^t y λ_j^t son soluciones a la ecuación homogénea, una combinación lineal de ambas, $A_i \lambda_i^t + A_j \lambda_j^t$ es también una solución de la ecuación homogénea. Esta propiedad se verifica sustituyendo la anterior expresión en la ecuación homogénea. Después de sacar el factor común $A_i \lambda_i^{t-p}$ por una parte y $A_j \lambda_j^{t-p}$ por la otra, se obtiene

$$A_i \lambda_i^{t-p} [\lambda_i^p - \dots - \Phi_p] + A_j \lambda_j^{t-p} [\lambda_j^p - \dots - \Phi_p] = 0$$

Ya que las dos expresiones entre corchetes son iguales a cero.

Este segundo teorema permite establecer que una combinación lineal de dos soluciones también es una solución. Precisamente la solución general de la ecuación homogénea se construye tomando las p soluciones básicas, multiplicadas cada una por una constante arbitraria. Es decir

$$Y_t^c = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t + \dots + A_p \lambda_p^t$$

Que es la función complementaria – solución más general de la ecuación homogénea - en tanto parte de la solución general.

Es importante analizar el comportamiento de Y_t , cuando t crece indefinidamente. De acuerdo con la anterior expresión puede verse que si se verifica que $|\lambda_i| < 1 \forall i$, entonces cuando $t \rightarrow \infty$, sucede que $Y_t \rightarrow 0$ con independencia al valor que se asigne a las constantes arbitrarias. Se dice entonces que el sistema es estable, o

sea estacionario en el contexto de procesos estocásticos. Por lo que, $|\lambda_i| < 1 \forall i$, es la condición necesaria y suficiente de estacionariedad.

4.8. Teniendo en cuenta lo anterior, la representación de un proceso ARMA (p, q)

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \Theta_q \varepsilon_{t-q}$$

tal como fue definido en el apartado 4.5. puede plantearse, ahora, como,

$$\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

siendo,

$$\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p$$

el operador polinomial de retardos indicativo de un proceso autorregresivo de orden p sobre la variable Y_t , considerada, y

$$\Theta(B) = 1 - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q$$

el operador polinomial de retardos para un proceso de medias móviles de orden q definido sobre un término de error ε_t que cumple con las hipótesis tradicionales de media nula, varianza constante y ausencia de autocorrelación (tal como fueron planteados los modelos AR(p) y MA(q) en los apartados 4.3. y 4.4.).

De acuerdo a esto, el modelo AR(p) se puede expresar en forma compacta como

$$\Phi(B)Y_t = \varepsilon_t$$

que es formalmente similar a la de una ecuación en diferencias de orden p – *no homogénea* –, pero con las funciones Y_t y ε_t de tipo aleatorio.

4.9. Sea ahora la ecuación en diferencias homogénea de primer orden

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} \quad \text{o} \quad (1 - \Phi_1 B)Y_t = 0$$

la solución de esta ecuación será del tipo λ^t . Por tanto,

$$\lambda^t - \Phi_1 \lambda^{t-1} = 0$$

o, dividiendo por λ^{t-1}

$$\lambda - \Phi_1 = 0$$

Es decir, la raíz obtenida será

$$\lambda = \Phi_1$$

La solución general – función complementaria, ya que se trata de una ecuación homogénea – será

$$Y_t = A\lambda^t = A\Phi_1^t$$

Si $|\Phi_1| < 1$, al aumentar t , $Y_t \rightarrow 0$. Mientras que si $|\Phi_1| > 1$, la solución diverge. En la ecuación anterior para $t = 0$, se tiene que $Y_0 = 0$. Tomando como dato este valor de Y_0 , se tiene el siguiente modelo

$$Y_t = Y_0 \Phi_1^t$$

Esta ecuación describe la trayectoria temporal de Y_t a partir del valor inicial dado. La condición necesaria y suficiente para que el modelo sea estacionario es que $|\Phi_1| < 1$.

Alternativamente se podría utilizar la ecuación polinomial de retardos, $(1 - \Phi_1 B) = 0$, que daría una raíz $B_1 = 1 / \Phi_1$. En este caso la condición de estacionariedad se formularía como $|B_1| > 1$.

Si $0 < \Phi_1 < 1$, entonces Y_t seguirá una trayectoria de decrecimiento exponencial a partir de la condición inicial dada. Cuando $-1 < \Phi_1 < 0$, entonces Y_t decrecerá en valor absoluto de forma exponencial aunque con alternancia de los signos.

4.10. Considérese ahora la ecuación de segundo orden

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} \quad \text{o} \quad (1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2) Y_t = 0$$

La ecuación característica que corresponde a esta ecuación en diferencias es,

$$\lambda^2 - \Phi_1 \lambda - \Phi_2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtienen las raíces λ_1, λ_2 .

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\Phi_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Phi_1^2 + 4\Phi_2}}{2}$$

Denominando como D al radicando, se presentan tres casos con características distintas,

a) $D > 0$

Las dos raíces λ_1, λ_2 son reales y distintas. La solución de la ecuación homogénea tomará la siguiente forma

$$Y_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t$$

b) $D = 0$

En este caso las dos raíces son reales y repetidas $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \Phi_1 / 2$, es decir, se obtiene una raíz doble. En esta circunstancia es simple comprobar que la solución más general de la ecuación homogénea, es la siguiente función complementaria,

$$Y_t^C = A_1 \lambda^t + A_2 t \lambda^t$$

Se puede comprobar que $t \lambda^t$ es una solución de la ecuación homogénea. Después de eliminar el factor común λ^{t-2} se obtiene

$$\begin{aligned} t\lambda^2 - \Phi_1(t-1)\lambda - \Phi_2(t-2) = \\ t\left(\frac{\Phi_1}{2}\right)^2 - (t-1)\Phi_1 \frac{\Phi_1}{2} - (t-2)\Phi_2 \end{aligned}$$

Ahora bien, en este caso como $D = 0$ se verifica que $\Phi_1^2 = -4\Phi_2$. Sustituyendo Φ_1^2 en la anterior ecuación se comprueba fácilmente que se hace igual a cero.

c) $D < 0$

Se obtienen dos raíces complejas conjugadas. Haciendo $\alpha = \frac{\Phi_1}{2}$; $\theta = \frac{\sqrt{\Phi_1^2 + 4\Phi_2}}{2}$ las dos raíces son

$$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\theta; \quad \forall i = \sqrt{-1}$$

La solución general a la ecuación homogénea tomará la forma

$$Y_t = A_1[\alpha + i\theta]^t + A_2[\alpha - i\theta]^t$$

Donde A_1, A_2 son números complejos conjugados arbitrarios que se pueden determinar a partir de unas condiciones iniciales. Suponiendo que la variable Y toma valores Y_0, Y_1 ; $\forall t = 0 \wedge t = 1$ respectivamente, se puede plantear el siguiente sistema,

$$Y_0 = A_1 + A_2$$

$$Y_1 = A_1[\alpha + i\theta] + A_2[\alpha - i\theta]$$

Como A_1, A_2 son los números complejos conjugados, se pueden expresar de la siguiente forma,

$$A_1 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}Ci$$

$$A_2 = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}Ci$$

Donde el factor $\frac{1}{2}$ se ha introducido por conveniencia. Sustituyendo estos valores en el sistema y resolviendo para B y C se obtiene,

$$B = Y_0$$

$$C = \frac{[\alpha Y_0 - Y_1]}{\theta}$$

Pero además, se observa directamente que

$$A_1 + A_2 = B$$

$$A_1 - A_2 = Ci$$

Alternativamente, la solución $Y_t = A_1[\alpha + i\theta]^t + A_2[\alpha - i\theta]^t$ se puede expresar en forma polar, efectuando las siguientes transformaciones,

$$\alpha = r \cos w, \theta = r \sen w. \text{ Ecuación de Transformación}$$

donde $(\alpha; \theta)$ son Coordenadas cartesianas

$(r; w)$ son Coordenadas polares

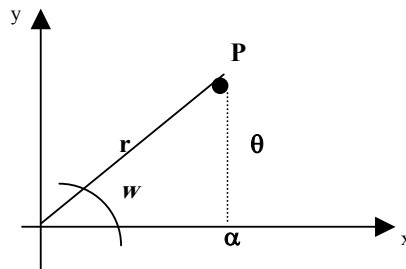
A partir de la ecuación de transformación se obtiene $\cos w = \frac{\alpha}{r}$ y $\sen w = \frac{\theta}{r}$

De donde se obtiene $r = \sqrt{\alpha^2 + \theta^2}$ y $w = \tan^{-1} \frac{\theta}{\alpha}$

Nota: Las coordenadas cartesianas no es la única forma de describir la posición de un punto en el plano por dos números. Hay otras, entre ellas las coordenadas polares son particularmente útiles. Sea P un punto en el plano con coordenadas cartesianas (α, θ) . Supóngase que P no es el origen 0 , por lo que la distancia euclidiana, $r = \sqrt{\alpha^2 + \theta^2} \Rightarrow r^2 = \alpha^2 + \theta^2$, de P a 0 , es positiva. Entonces, $(\alpha/r)^2 + (\theta/r)^2 = 1$. Así, $(\alpha/r, \theta/r)$ son las coordenadas de un punto sobre la circunferencia unidad, y según la definición de la función seno y coseno, hay un número w tal que $\alpha/r = \cos w$, $\theta/r = \sin w$. Esta w es determinada sólo hasta un múltiplo de 2π . Los números (r, w) se llaman **coordenadas polares** de P . La relación entre coordenadas polares (r, w) y coordenadas cartesianas (α, θ) la dan las fórmulas,

$$\alpha = r \cos w, \quad \theta = r \sin w \quad (1)$$

Estas también pueden verse en la siguiente figura



Es conveniente ampliar la definición y considerar *cada* par de números (r, w) que satisfacen (1) como las coordenadas polares del punto con coordenadas cartesianas (α, θ) . Esta convención significa que

- a) Si (r, w) son coordenadas polares de P , también lo son $(r, w \pm 2\pi)$;
- b) Si (r, w) son coordenadas polares de P , también lo son $(-r, w \pm \pi)$;
- c) Para cada w los números $(0, w)$ son coordenadas polares del origen.

Ejemplo. Hallar las coordenadas cartesianas del punto con coordenadas polares $(3, 3\pi/4)$. Se usa la ecuación (1) con $r = 3$ y $w = 3\pi/4$.

Entonces, $\alpha = 3 \cos(3\pi/4) = 3(-\sqrt{2}/2) \approx -2,121$; y $\theta = 3 \sin(3\pi/4) \approx 2,121$.

Hallar las coordenadas polares del punto con coordenadas cartesianas $(3, 4)$. Se usa la ecuación (1) despejando $\cos w = \alpha/r$; $\sin w = \theta/r$

Conociendo esto se tiene $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ y $w = \tan^{-1} 4/3 = \tan^{-1} 1.333... \approx 53^\circ$.

Teniendo en cuenta la nota anterior

$$r^2 = \alpha^2 + \theta^2$$

El número r es precisamente el *módulo* o valor absoluto del número complejo. Si las transformaciones de α y θ se sustituyen en la solución general a la ecuación homogénea, se tendrá

$$Y_t = A_1 [r \cos tw + ir \sin w]^t + A_2 [r \cos wt - ir \sin w]^t$$

Así expuesta la solución no es fácil de interpretar. Pero, afortunadamente, gracias al Teorema de De Moivre esta función puede transformarse en términos trigonométricos. El teorema dice que para elevar un número complejo a una potencia dada, simplemente, se deben modificar sus coordenadas polares elevando el modulo a la potencia dada y multiplicando el ángulo por la mencionada potencia. De esta forma, después de sacar factor común el módulo elevado a la potencia t , la expresión anterior se transforma en

$$Y_t = r^t [A_1 (\cos wt + i \sin wt) + A_2 (\cos wt - i \sin wt)]$$

$$= r^t [(A_1 + A_2) \cos wt + (A_1 - A_2)i \sin wt]$$

Teniendo en cuenta, que

$$A_1 + A_2 = B$$

$$A_1 - A_2 = Ci \Rightarrow -(A_1 - A_2)(-1)^{-1/2} = C \Rightarrow (A_1 - A_2)i = -C$$

la expresión anterior quedará

$$Y_t = r^t [B \cos wt - C \sin wt]$$

Alternativamente, se puede obtener otra expresión de la solución. Si se hace

$$B = -A \sin \varepsilon$$

$$C = -A \cos \varepsilon$$

se puede expresar la solución general de la ecuación en diferencias de la siguiente forma

$$Y_t = Ar^t [\cos \varepsilon \cos wt - \sin \varepsilon \sin wt]$$

Teniendo en cuenta la propiedad trigonométrica de la adición

$$\sin \varepsilon \cos wt - \cos \varepsilon \sin wt = \sin(wt - \varepsilon)$$

quedará finalmente,

$$Y_t = -Ar^t \sin[wt - \varepsilon]$$

La solución anterior comprende una única función trigonométrica que es fácilmente representable. Es por tanto una función cíclica del tiempo, en la que se pueden distinguir los siguientes elementos:

a) *Amplitud* Ar^t que es el factor de escala que se aplica a la función seno para obtener el valor de Y_t . En este caso la amplitud es variable ya que depende de t . La condición necesaria y suficiente para que la ecuación sea estacionaria es que $r < 1$. En ese caso, la solución representará una oscilación sinusoidal que se irá atenuando de forma geométrica.

b) *Frecuencia angular* w que se mide en radianes e indica el número de ciclos que hay por unidad de tiempo. Un ciclo se completa cada vez que se alcanza 2π - o un múltiplo de 2π - radianes. El periodo P es el recíproco de la frecuencia, y señala el número de períodos de tiempo que se necesitan para completar un ciclo. Viene dado por, $P = \frac{2\pi}{w}$. Así por ejemplo, una función en que $w = \frac{2\pi}{6}$ significaría

que el número de ciclos por unidad de tiempo es $1/6$. Alternativamente $P = \frac{2\pi}{2\pi/6} = 6$, es decir, cada 6

períodos de tiempo se completa un ciclo.

c) *Fase* ε que se mide también en radianes y con ella se determina para un momento dado del tiempo la situación del ciclo. Así por ejemplo, si $\varepsilon = \pi/2$, en el momento $t = 0$, $Y_t = A(\sin \pi/2)$.

En la figura 4.1. se ha representado la solución general para $A = 100$, $r = 0,8$, $w = 2\pi/6$ y $\varepsilon = \pi/2$.

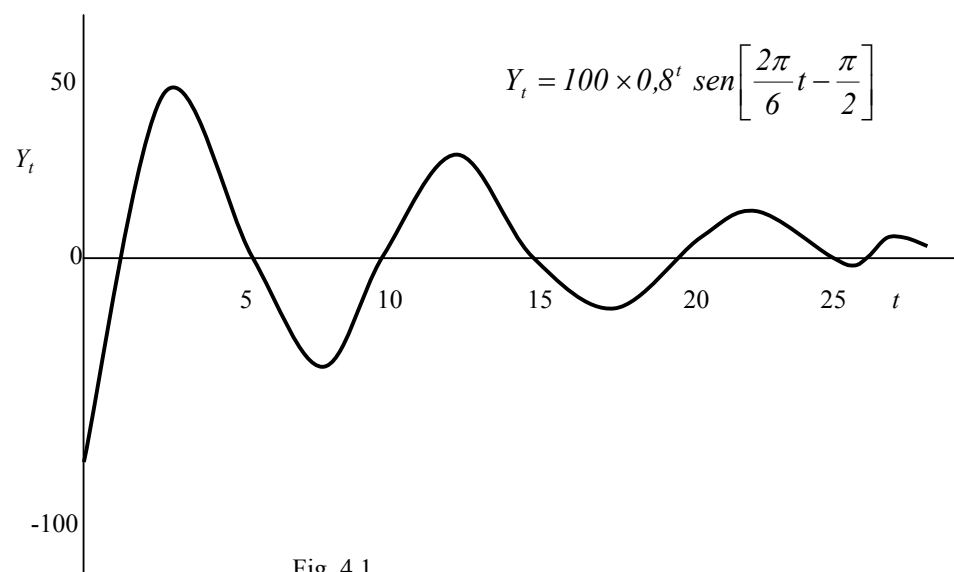


Fig. 4.1.

En una ecuación homogénea de segundo orden cuando las raíces son reales y distintas, la condición de estacionariedad implica que $|\lambda_1| < 1; |\lambda_2| < 1$. Cuando es una raíz única debe verificarse $|\lambda| < 1$. Si son raíces imaginarias se puede expresar diciendo que el módulo debe ser inferior a la unidad, es decir $r < 1$. Como alternativa a la ecuación característica se puede usar la ecuación polinomial para la obtención de las raíces. En ese caso,

$$[1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2] = 0$$

y, de acuerdo a lo analizado anteriormente, las raíces de esta ecuación son las inversas de las de la ecuación característica, por lo que se deberá cumplir con la condición $|B_1| > 1; |B_2| > 1$. Si las raíces son reales, se pueden representar utilizando solamente el eje de abscisas. Si son complejas, se necesita el eje de ordenadas para representar la parte imaginaria. Así, si $B_1; B_2$ son raíces complejas conjugadas tomarán la forma

$$B_1 = \alpha + i\theta$$

$$B_2 = \alpha - i\theta$$

Su representación gráfica para $\alpha = 0,8$ y $\theta = 1,2$ puede verse en la figura 4.2.

El módulo de las raíces de este ejemplo es $r = \sqrt{\alpha^2 + \theta^2} = 1,44$. Por tanto, la ecuación es estacionaria, ya que este módulo es el recíproco del que se hubiera obtenido utilizando la ecuación característica.

En el contexto de los procesos estocásticos, y cuando se utiliza el operador polinomial de retardos, la condición de estacionariedad se suele formular diciendo que las raíces deben caer *fuera* del círculo unidad, según queda ilustrado en la figura 4.2. Lógicamente, en términos de las raíces $\lambda_1; \lambda_2$ de la ecuación característica, deben caer *dentro* del círculo unidad para que la ecuación sea estacionaria.

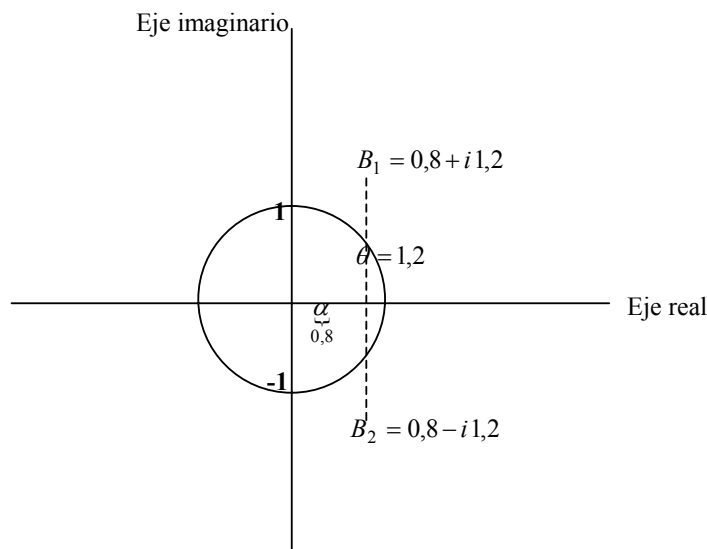


Fig. 4.2.

Las condiciones de estacionariedad pueden definirse directamente a partir de los coeficientes de Φ_1, Φ_2 ; ya que después de algunos pasos algebraicos se puede demostrar que cuando las raíces B_1, B_2 caen fuera del círculo unidad, se verifican las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}\Phi_1 + \Phi_2 &< 1 \\ -\Phi_1 + \Phi_2 &< 1 \\ \Phi_2 &> -1\end{aligned}$$

Si se sustituye en las desigualdades el signo $<$ por el signo $=$ se obtienen tres líneas rectas, que definen la zona de estacionariedad, que está constituida por todos los puntos en el interior del triángulo, representado en la figura 4.3. La zona por debajo del círculo corresponde a raíces estacionarias complejas.

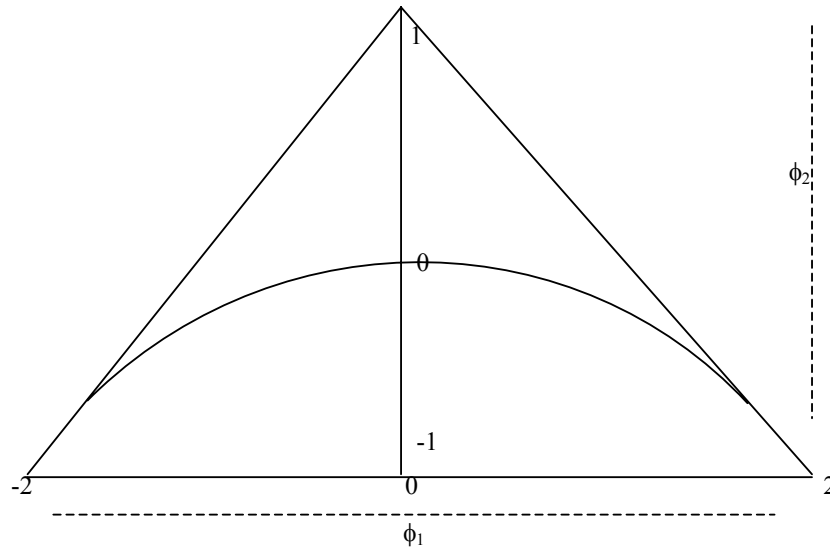


Fig. 4.3.

En las ecuaciones en diferencias de orden superior a dos, pueden aparecer raíces reales o complejas. Naturalmente cada raíz compleja irá siempre acompañada de su conjugada. En el caso de que una raíz λ_j aparezca repetida n veces se toman como soluciones básicas a $\lambda_i, t\lambda_i, t^2\lambda_i, \dots, t^{n-1}\lambda_i$. En general, la ecuación en diferencias homogénea de orden p

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \dots - \Phi_p Y_{t-p}$$

Tiene como solución general

$$Y_t^c = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t + \dots + A_p \lambda_p^t$$

siendo,

$$\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p = \prod_{j=1}^p (1 - \lambda_j B)$$

Para que esta solución sea acotada para todo t es necesario imponer la condición de estacionariedad $|\lambda_j| < 1, j = 1, \dots, p$; o bien, que los ceros del polinomio característico $\Phi(B)$ tengan todos un módulo mayor que la unidad. Las constantes arbitrarias A_1, A_2, \dots, A_p se determinan con p condiciones iniciales.

La ecuación en diferencias no homogénea,

$$\Phi(B)Y_t = g(t)$$

tienen como *solución general*

$$Y_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t + \dots + A_p \lambda_p^t + \frac{1}{\Phi(B)} g(t)$$

Esto es, la función complementaria – solución general de la ecuación homogénea – más la integral particular – *solución particular* de la ecuación completa –.

En el caso de que la ecuación homogénea sea estacionaria, puede demostrarse que siempre existe un operador $\Psi(B)$ tal que

$$\frac{1}{\Phi(B)} g(t) = \Psi(B)g(t) = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j \right] g(t)$$

Es la solución particular. Esta formulación ofrece una solución analítica general, pero debido a que la definición de operador inverso no suministra un procedimiento útil para proceder a su cálculo, se encuentran en la práctica dificultades operacionales. No obstante, la doctrina ha resuelto el problema para soluciones particulares especiales.

De esta forma cuando

a) $g(t) = c$ (*constante*), la solución completa será

$$Y_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t + \dots + A_p \lambda_p^t + \frac{c}{1 - \Phi_1 - \dots - \Phi_p}$$

b) $g(t) = \gamma + \delta t$ (*función lineal de tiempo*), la solución completa, para una ecuación de primer orden, será

$$Y_t = A_1 \lambda_1^t + \frac{1}{1 - \Phi(B)} (\gamma + \delta t)$$

c) $g(t) = \beta d^t$ (*función exponencial del tiempo*), la solución completa, para una ecuación de primer orden, será

$$Y_t = A_1 \lambda_1^t + \frac{\beta}{1 - \Phi_1 d^{-1}} d^t$$

Si $|d| < 1 \Rightarrow Y_t \rightarrow 0$, al crecer t indefinidamente.

d) $g(t) = \varepsilon_t$ (*Una variable aleatoria tipo ruido blanco*), la solución particular vendría dada por

$$Y_t = \frac{1}{\Phi(B)} \varepsilon_t$$

En el caso de que $\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B$, la solución particular, suponiendo que el proceso arranca en $-N$, será

$$Y_t = \sum_{j=0}^{t+N-1} \Phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

Para el momento $-N$, la condición inicial será Y_{-N} . Para este período y para todos los anteriores ε_t tomará valor 0.

Puede verse que la solución completa tiene dos componentes, un componente sistemático que viene dado por la solución general y que depende de las condiciones iniciales Y_{-N} y un componente aleatorio, que es justamente la solución particular.

Si se hace tender N hacia infinito, es decir, si el proceso arranca desde $-\infty$, y el modelo es estacionario, la solución completa queda reducida a

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

En el otro extremo, si se toma como condición inicial el valor Y_{t-1} , la solución completa sería

$$Y_t = Y_{t-1} \Phi_1 + \varepsilon_t$$

En este caso, la solución particular vendría dada únicamente por ε_t .

En la utilización de los modelos ARMA y ARIMA aparecen ecuaciones en diferencias finitas como las anteriores, si bien la variable que interviene se considera que es un proceso estocástico y no una función real. No obstante, formalmente se aplican los métodos comentados en este acápite, teniendo en cuenta las diferencias en la interpretación de los resultados.