Capítulo 21. SISTEMAS DE RELACIONES LINEALES SIMULTANEAS

Capítulo 21. SISTEMAS DE RELACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS

Hasta aquí, el proceso de investigación econométrica se ocupó de los modelos uniecuacionales, a partir de ahora el interés se traslada a los modelos multiecuacionales. Cuando estas estructuras están integradas por ecuaciones simultáneas, las variables explicativas son endógenas y se relacionan con el término de error, la estimación de las ecuaciones en forma aislada por mínimos cuadrados ordinarios da lugar a parámetros sesgados e inconsistentes. En este capítulo se analizan los requisitos que debe cumplir un modelo multiecuacional para que el método de estimación seleccionado permita conocer el valor de los parámetros.

21.1. Especificación de modelos multiecuacionales

Cuando el modelo es uniecuacional

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

la relación causa efecto está explicitada en la especificación del modelo y es única. Esta relación matemática expresa las características básicas y esenciales de un orden institucional y legal vigente, una tecnología incorporada a la actividad económica objeto de análisis, o la regularidad observada en el comportamiento real de los sujetos de la actividad económica.

Estas relaciones son de comportamiento y suelen denominarse: ecuaciones institucionales o legales -expresan medidas de política o aspectos legales-, ecuaciones tecnológicas -reflejan relaciones técnicas en la que participan los factores de producción- y ecuaciones de comportamiento -hacen referencia al comportamiento de los agentes económicos-.

Un modelo multiecuacional siempre va a tener alguna o todas las ecuaciones descriptas anteriormente; además, pueden aparecer las condiciones de equilibrio y las identidades contables. Estas ecuaciones que especifican un modelo se denominan estructurales o primarias, por añadidura se dice que el modelo es estructural o primario. Cuando se realiza la estimación se tiene la estimación de la estructura y por ende de los parámetros estructurales.

En un sistema de ecuaciones simultáneas, no es posible estimar aisladamente una ecuación sin tener en cuenta la información proporcionada por las demás ecuaciones. Esto ocurre porque hay variables dependientes en alguna ecuación que actúan como explicativas en otra ecuación, dando lugar a correlación entre las variables explicativas y el término de error. El estimador mínimo cuadrático ordinario en este contexto, arroja estimadores sesgados e incosistentes.

Existen dos tipos generales de modelos multiecuacionales: los denominados Modelos Recursivos o de cadenas causales -introducidos empíricamente por Tinbergen en 1938 y desarrollados y sistematizados teóricamente por Herman Wold quien dedujo sus propiedades matemáticas y econométricas- y los Modelos Interdependientes, introducidos por Havelmo en 1943.

Ejemplo 21.1. Tipos de Modelos

Modelos recursivos o en cadena causal

$$
\begin{aligned}
Y_{1t} &= \propto_0 + \propto_1 Y_{2t} + \propto_2 X_{1t} + \varepsilon_{1t} \\
Y_{2t} &= \beta_0 + \beta_1 Y_{3t} + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_{2t} \\
Y_{3t} &= \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + \gamma_2 X_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + \varepsilon_{3t}
\end{aligned}
$$

Este modelo puede resolverse empezando por la tercer ecuación, luego la segunda y por último la primera.

Modelos recursivos por bloques

$$
\begin{aligned}
Y_{1t} &= \propto_0 + \propto_1 Y_{2t} + \propto_2 X_{1t} + \varepsilon_{1t} \\
Y_{2t} &= \beta_0 + \beta_1 Y_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_{2t} \\
Y_{3t} &= \gamma_0 + \gamma_1 Y_{1t} + \gamma_2 Y_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + \varepsilon_{3t}
\end{aligned}
$$

Las dos primeras ecuaciones forman un bloque y la tercera otro bloque. Las dos primeras se determinan simultáneamente y la tercera depende de las otras dos.

Modelos interdependientes o de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \propto_0 + \propto_1 Y_{2t} + \propto_2 Y_{3t} + \varepsilon_{1t} \\ Y_{2t} &= \beta_0 + \beta_1 Y_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_{2t} \\ Y_{3t} &= \gamma_0 + \gamma_1 Y_{1t} + \gamma_2 X_{1t} + \gamma_3 X_{3t} + \varepsilon_{3t} \end{aligned}$$

Este tipo de modelos requieren una resolución conjunta.

Un modelo lineal completo se puede definir, en su forma estructural, mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} \propto_{11} Y_{1t} + \propto_{12} Y_{2t} + \cdots + \propto_{1G} Y_{Gt} + \beta_{11} X_{1t} + \beta_{12} X_{2t} + \cdots + \beta_{1k} X_{kt} = \varepsilon_{1t} \\ \propto_{21} Y_{1t} + \propto_{22} Y_{2t} + \cdots + \propto_{2G} Y_{Gt} + \beta_{21} X_{1t} + \beta_{22} X_{2t} + \cdots + \beta_{2k} X_{kt} = \varepsilon_{2t} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \propto_{G1} Y_{1t} + \propto_{G2} Y_{2t} + \cdots + \propto_{GG} Y_{Gt} + \beta_{G1} X_{1t} + \beta_{G2} X_{2t} + \cdots + \beta_{Gk} X_{kt} = \varepsilon_{Gt} \end{array} \qquad [1]$$

para todo $t = 1,2,3 \dots, T$

donde

Y_{it} $\forall i = 1,2 \dots G$ y $\forall t = 1,2 \dots T$ son variables endógenas

X_{jt} $\forall j = 1,2 \dots K$ y $\forall t = 1,2 \dots T$ son variables exógenas, predeterminadas o explicativas del modelo

α_{ii} $\forall i = 1,2 \dots G$ son parámetros estructurales, coeficientes de las variables endógenas

β_{ij} $\forall i = 1,2 \dots G$ y $\forall j = 1,2 \dots K$ son parámetros estructurales, coeficientes de las variables exógenas

ε_{it} $\forall i = 1,2 \ldots G$ y $\forall t = 1,2 \ldots T$ son las perturbaciones aleatorias de cada ecuación

El sistema tiene G variables endógenas y K variables predeterminadas; en forma matricial, se puede expresar

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1G} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{G1} & \alpha_{G2} & \cdots & \alpha_{GG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{Gt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{Kt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Gt} \end{bmatrix} \quad \forall t = 1,2 \ldots T \qquad [2]$$

El sistema puede reescribirse como

$$\mathbf{A}\,\mathbf{Y} + \mathbf{B}\,\mathbf{X} = \boldsymbol{\varepsilon} \;\; \forall t = 1,2 \ldots T \;\; \text{y} \; |\mathbf{A}| \neq 0 \qquad [3]$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes de variables endógenas, $\mathbf{Y}$ es el vector de variables endógenas, $\mathbf{B}$ es la matriz de coeficientes de variables predeterminadas del modelo (variables exógenas y endógenas retardadas), $\mathbf{X}$ es el vector de variables predeterminadas y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de perturbaciones.

La incógnita a resolver es el vector $\mathbf{Y}$, al despejarlo se obtiene

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{X} + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad [4]$$

Haciendo $-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \Pi$ y $\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}$ se reescribe la expresión como

$$\mathbf{Y} = \Pi\mathbf{X} + \boldsymbol{\omega} \qquad [5]$$

La expresión [3] es el sistema en la forma estructural y la expresión [5] es el sistema reducido. Los parámetros de ambos sistemas están relacionados por la expresión

$$\Pi = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \qquad [6]$$

[6] es el sistema de parámetros que permite conocer los parámetros del sistema estructural [3], a partir del conocimiento de los parámetros del sistema de la forma reducida [5]. Para saber si esto es posible se han desarrollado las condiciones de identificación que se desarrollan más adelante.

21.2. Consistencia e Independencia de hipótesis

Al especificar un modelo econométrico el investigador plantea hipótesis que -en el caso de los modelos uniecuacionales- queda establecida en la única ecuación y no requiere más que su estimación para corroborar que se cumple o no en espacio o tiempo determinado. Quiere decir que el investigador no solo estima un modelo econométrico, sino que también y fundamentalmente verifica empíricamente si se cumple en ese espacio y tiempo.

En cambio, en los modelos multiecuacionales, al especificar el modelo el investigador debe, antes de proceder a estimarlo, verificar si las ecuaciones que plantea son consistentes e independientes entre sí. Al hacer esto está probando si las hipótesis planteadas, a través de ellas, son consistentes e independientes. Metodológicamente es un paso teórico necesario para poder seguir adelante con su investigación empírica.

Un modelo es una construcción lógica empírica que debe cumplir con los requisitos lógicos de hipótesis y tesis y con los empíricos caracterizados por las pruebas de validez. Las ecuaciones que especifican los sistemas multiecuacionales constituyen las *hipótesis* o *proposiciones iniciales* del modelo.

La *hipótesis* es el axioma, o conjunto de axiomas o proposiciones iniciales, referente a "la conducta de los sujetos de la actividad económica en relación a un orden institucional" (Dagum-Dagum, 1971), legal y tecnológico vigente. Equivale a describir las causas del fenómeno bajo estudio.

Toda hipótesis para ser considerada como tal debe cumplir con los requisitos de *consistencia* e *independencia*. Un modelo que comprende un sistema axiomático o conjunto de hipótesis es *completo o admite solución;* en caso contrario, el modelo no admite solución.

- *Consistencia* es la no contradicción entre las proposiciones iniciales que integran la hipótesis.
- Independencia significa que cada proposición inicial no puede ser deducida como proposición final de las restantes.

Como las proposiciones iniciales se especifican matemáticamente por medio de ecuaciones lineales, las propiedades de consistencia e independencia se pueden expresar más rigurosamente.

De esta forma, sean

$\mathbf{A}$ la matriz de coeficientes de las variables endógenas del sistema

G el número de ecuaciones del sistema

$\mathbf{B}$ el vector de las combinaciones lineales de los coeficientes de las variables predeterminadas o exógenas y los términos independientes del sistema

$\mathbf{Y}$ el vector de las variables endógenas del sistema

Las hipótesis del sistema serán consistentes sí y solo sí el rango de la matriz de coeficientes de las variables endógenas es igual al rango de la matriz ampliada por el vector columna $\mathbf{B}$

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}|\mathbf{B})$$

Si es consistente puede admitir solución única o infinitas soluciones.

a) Si $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \boldsymbol{G} \rightarrow$ solución única $\rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

   Condición necesaria: $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \boldsymbol{G}$

   Condición necesaria y suficiente: $\mathbf{A}$ no singular $\rightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$

b) Si $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}|\mathbf{B}) < \boldsymbol{G} \rightarrow$ infinitas soluciones

Además, las hipótesis del sistema serán independientes sí y solo sí

$$\rho(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \boldsymbol{G}$$

Si el $\rho(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \boldsymbol{n} < \boldsymbol{G}$ entonces G-n ecuaciones del sistema son combinación lineal de las n restantes y se dicen redundantes. Esto significa que pueden eliminarse del modelo sin que afecte su solución.

Ejemplo 21.2. Modelo interdependiente del ingreso nacional

$$\begin{array}{lll} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 T_t + \varepsilon_{1t} & 0 < \alpha_1 < 1, & 0 < \alpha_2 < 1 \\ T_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \varepsilon_{2t} & 0 < \beta_1 < 1 & \\ Y_t = C_t + I_t + G_t & & \end{array}$$

donde:

C_t = consumo nacional

T_t = impuestos totales

Y_t = ingreso nacional

I_t = inversión neta (considerada autónoma)

G_t = gasto público en bienes y servicios

La construcción de los modelos económicos generalmente requiere una solución única para lo cual se exige el cumplimiento de los requisitos de consistencia e independencia. Ello implica, como condición necesaria, que el número de variables sea igual al número de ecuaciones del sistema y como condición necesaria y suficiente, que la matriz de coeficientes sea no singular, es decir: $|A| \neq 0$

En cuanto a las ecuaciones del modelo, se tiene

1) ecuación de comportamiento, indica que los consumidores compran en función de sus ingresos disponibles $(Y_t - T_t)$,

2) ecuación institucional, representa el volumen total recaudado de impuestos en función del ingreso nacional,

3) ecuación de identidad, es un axioma planteado por definición del ingreso nacional como el total del consumo más la inversión neta más los gastos públicos, no es comprobable empíricamente y no puede ser sometido a pruebas de falsificación.

Agrupando en el primer miembro las variables endógenas, que constituyen las incógnitas del modelo, resulta:

$$\begin{aligned}
&C_t - \alpha_1 Y_t - \alpha_2 T_t = \alpha_0 + \varepsilon_{1t}\\
&T_t - \beta_1 Y_t = \beta_0 + \varepsilon_{2t}\\
&Y_t - C_t = I_t + G_t
\end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ \beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

En el análisis de la consistencia se trabaja con la parte determinista del modelo, eliminando el vector de variables aleatorias.

Se calcula el r[A];

$$|A| = 1(-1)^2|A_{11}| + \alpha_1(-1)^3|A_{12}| + (-\alpha_1)(-1)^4|A_{13}|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -\beta_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \alpha_1 \begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \alpha_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + \alpha_1\beta_1 - \alpha_1$$

De modo que el determinante es distinto de cero y asegura el rango de la matriz igual a 3. Analíticamente es válido expresar la condición

$$\alpha_1(1 - \beta_1) \neq 1$$

que asegura el rango completo de la matriz. Para el caso que se está analizando, expresar esta condición es redundante porque para que el determinante sea 0 debe observarse que $\alpha_1 = 1$ y $\beta_1 = 0$ pero esto no es posible dadas la condiciones establecidas para los parámetros en las ecuaciones (1) y (2). Con lo que la matriz a es no singular.

Además, $r[AB] = 3$; ya que, el determinante de la matriz ampliada $[AB]$ no se puede calcular por no ser cuadrada y el determinante de mayor orden no nulo es el de la submatriz $[A]$ de la matriz $[AB]$. Por lo tanto

$\rho(\mathrm{A}) = \rho(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \rightarrow$ consistencia

y, $\rho(\mathrm{A}) = \rho(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 3 \rightarrow$solución única

Esto significa que $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BX}$

siendo G el número de variables endógenas.

Es factible cambiar el orden de las ecuaciones para que la matriz **A** sea triangular. Esto permite obtener el determinante en forma más sencilla, ya que su cálculo se reduce al producto de los elementos de la diagonal principal.

Las Tesis o proposiciones finales obtenidas son lógicamente consistentes con los postulados o proposiciones iniciales del sistema.

Las Tesis son las proposiciones finales o conclusiones referentes al comportamiento de los sujetos de la actividad económica deducidas a partir de las hipótesis o proposiciones iniciales que posean las propiedades de consistencia e independencia.

Las tesis obtenidas deben ser legítimamente consistentes con el conjunto de las hipótesis, o sea debe haber una afirmación única de verdad o falsedad. Un modelo generalmente tiene más de una tesis o sea más de una conclusión.

Todo modelo, considerado como un sistema hipotético deductivo, incluye las proposiciones iniciales o hipótesis y las proposiciones finales.

Ejemplo 21.3. Modelo de mercado para un producto agrícola (Wold)

1) $D_t = \alpha_1 - \beta_1 P_t; \quad \beta_1 > 0$

2) $S_t = \alpha_2 + \beta_2 P_{t-1}; \quad \beta_2 > 0$

3) $P_t = P_{t-1} + \lambda(D_{t-1} - S_t); \quad \lambda > 0$

El modelo de mercado para un producto agrícola (Wold), es un modelo que tiene gran generalidad desde el punto de vista teórico. Es decir, el comportamiento de la oferta, demanda y precio presentado en el modelo puede ser aplicada, teóricamente, a mercados para productos agrícolas, pero también, a mercados de productos industriales o de cualquier otro tipo.

Desde el punto de vista empírico, el modelo es muy limitado ya que otras variables se han eliminado y son muy relevantes, quitándole validez a sus conclusiones.

Este modelo se basa en los siguientes supuestos o hipótesis:

- (1) la demanda en un periodo es función lineal decreciente del precio del mismo periodo;
- (2) la oferta de un periodo es función lineal creciente del precio del periodo anterior;
- (3) el precio de un periodo es función del precio del periodo precedente y del exceso de demanda esperada (medida por la diferencia entre la demanda de un periodo y la oferta del siguiente).

Este conjunto de hipótesis cumple con los requisitos de independencia y consistencia, en efecto:

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_t \\ P_t \\ S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ P_{t-1} \\ D_{t-1} \end{bmatrix}$$

y, en forma compacta: $\mathbf{AY} = \mathbf{BX}$

es consistente e independiente, en efecto:

$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \mathbf{3}$ **=** número de variables endógenas $\rightarrow$ solución única

Esto significa que $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BX}$

Como puede apreciarse $\mathbf{A}$ es una matriz triangular, por lo tanto su determinante será el producto de los elementos de la diagonal principal.

Resolviendo el modelo con respecto a P_t se obtiene el comportamiento dinámico del mismo. Esto surge de reemplazar la demanda del periodo anterior y la oferta de este periodo por sus expresiones equivalentes

$$P_t = P_{t-1} + \lambda(\alpha_1 - \beta_1 P_{t-1} - \alpha_2 - \beta_2 P_{t-1})$$

$$P_t = P_{t-1} + \lambda\alpha_1 - \lambda\beta_1 P_{t-1} - \lambda\alpha_2 - \lambda\beta_2 P_{t-1}$$

$$P_t = (1 - \lambda\beta_1 - \lambda\beta_2)P_{t-1} + \lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_2$$

$$P_t - [1 - \lambda(\beta_1 + \beta_2)]P_{t-1} = \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Esta última relación es similar al modelo de ecuaciones en diferencias finitas, el cual se define teóricamente

$$y_{t+1} + a\, y_t = c$$

donde a y c son constantes. La solución general es

$$y_t = A\,(-a^t) + \frac{c}{1+a}$$

La constante arbitraria A asume un valor determinado cuando se establece la condición de que $y_t = y_0$ en el momento t=0; teniendo en cuenta esto, la solución particular es:

$$y_t = \left(y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a^t) + \frac{c}{1+a}$$

En el modelo de la trayectoria del precio,

$$a = -[1 - \lambda(\beta_1 + \beta_2)]$$

$$c = \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Realizando los reemplazos en la solución particular se tiene

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\lambda(\alpha_1 - \alpha_2)}{1 - [1 - \lambda(\beta_1 + \beta_2)]}\right)[1 - \lambda(\beta_1 + \beta_2)]^t + \frac{\lambda(\alpha_1 - \alpha_2)}{1 - [1 - \lambda(\beta_1 + \beta_2)]}$$

Resolviendo

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}\right)[1 - \lambda(\beta_1 + \beta_2)]^t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}$$

Donde el equilibrio intertemporal del precio (P^*) es

$$P^* = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}$$

y la desviación de la trayectoria temporal respecto del equilibrio es $1 - \lambda(\beta_1 + \beta_2)$

En síntesis, la trayectoria temporal del precio es

$$P_t = (P_0 - P^*)[1 - \lambda(\beta_1 + \beta_2)]^t + P^*$$

donde, $P_0 \neq P^*$

Conclusiones o tesis que se pueden obtener a partir de las premisas o hipótesis:

a) "si la demanda D_{t-1} resulta ser igual a la oferta S_t, el precio en el periodo t es el precio de equilibrio P_t^*, deduciéndose de la ecuación (3), $P_t^* = P_t = P_{t-1}$ para todo t en que se cumple la condición de equilibrio, o sea: $P_t^* = P_t = P_{t-1} = \cdots = P_0$"
b) "si la demanda esperada no es igual a la oferta en un periodo cero, el precio P_t de dicho periodo es $P_0 \neq P^*$"

Además, se deducen otras tres proposiciones finales respecto al comportamiento dinámico del precio:

1) Para $0 < \lambda < \frac{2}{\beta_1+\beta_2}$ el comportamiento dinámico del precio P_t converge al precio de equilibrio P^*;

2) Para $\lambda > \frac{2}{\beta_1+\beta_2}$ el comportamiento es divergente o explosivo;

3) Para $\lambda = \frac{2}{\beta_1+\beta_2}$ el comportamiento es oscilante, con fluctuaciones regulares, siendo: para t par $P_{2t} = P_0$ y para t impar $P_{2t-1} = 2P^* - P_0$.

No obstante, se puede aumentar el grado de validez agregando variables relevantes como por ejemplo, ingreso nacional en la ecuación de demanda o gasto social en la misma ecuación, logrando mayor validez en las conclusiones pero menor generalidad en las hipótesis.

Por otro lado, en economía se puede presentar un orden jerárquico en la construcción de modelos, donde los supuestos iniciales de uno son conclusiones o tesis de otros modelos de orden superior.

La parte empírica de la construcción de los modelos exige su contraste con la experiencia a fin de tener una medida de su realidad, esto es, el grado de representatividad de los mismos y, por lo tanto, del alcance de sus aplicaciones empíricas.

Las hipótesis y tesis de un modelo se contrastan con la experiencia en términos de probabilidad. La probabilidad de que las hipótesis y tesis no sean contradichas por la experiencia aumenta con el número de pruebas que la corroboran y la diversidad entre ellas.

21.3 Identificación

El problema de la identificación pretende establecer si las estimaciones numéricas de los parámetros de una ecuación estructural pueden ser estimados a partir de los coeficientes de la forma reducida. Si el cálculo es posible se habla de identificación, si no es posible de subidentificación. Además, indica cuál de todos los métodos de estimación disponibles es el más apropiado para el sistema en estudio.

El sistema de múltiples ecuaciones tiene:

- G variables endógenas
- K variables exógenas

donde cada ecuación tiene:

- g variables endógenas
- k variables exógenas

La regla de identificación comprende la condición de orden y la condición de rango. La primera es condición necesaria pero no suficiente y la segunda es condición necesaria y suficiente. Ambas se realizan sobre cada una de las ecuaciones que tiene el sistema siempre que tengan parámetros para estimar. De este modo, las identidades contables o por definición y las condiciones de equilibrio no se someten a estos requisitos.

La condición de orden analiza la relación entre la cantidad de variables exógenas que están en el sistema pero no forman parte de la ecuación y la cantidad de variables endógenas existentes en la ecuación menos 1. Si esta relación es mayor se habla de ecuación sobreidentificada, si es igual de ecuación exactamente identificada y si es menor de subidentificación. Para las dos primeras alternativas se dice que la ecuación está identificada, lo que posibilita conocer los parámetros de la forma estructural a través de los parámetros de la forma reducida; mientras que, en la última, no será posible acceder al valor de los parámetros en la forma estructural.

La condición de rango observa la información que no forma parte de la ecuación a analizar. Esto se realiza a partir de la construcción de submatrices de coeficientes de las variables endógenas y exógenas ausentes de la ecuación a identificar. El procedimiento consiste en

1. eliminar la fila de la ecuación que se quiere identificar
2. eliminar todas las columnas de las variables incluidas en la ecuación a identificar
3. analizar el rango en la submatriz resultante
4. si el rango es igual a la cantidad de variables endógenas que tiene el sistema menos 1, la ecuación está identificada

En síntesis: la condición de orden establece que $K - k \geq g - 1$, para que la ecuación esté identificada; particularmente si:

- $K - k = g - 1$, la ecuación está exactamente identificada
- $K - k > g - 1$, la ecuación está sobreidentificada
- $K - k < g - 1$, la ecuación está subidentificada

Por la condición de rango: $\rho[\mathbf{A}_i] = G - 1$

Ejemplo 21.4. Modelo Keynesiano de determinación de los ingresos

$$\begin{aligned}
C_t &= \beta_{11} + \beta_{12} Y_t + \beta_{13} T_t + \varepsilon_{1t} \\
I_t &= \beta_{21} + \beta_{22} Y_{t-1} + \varepsilon_{2t} \\
T_t &= \beta_{31} + \beta_{32} Y_t + \varepsilon_{3t} \\
Y_t &= C_t + I_t + G_t
\end{aligned}$$

Donde:

C_t Consumo

Y_t Ingreso

T_t Impuestos

I_t Inversión

G_t Gasto público

Las hipótesis sobre los parámetros del modelo afirman que β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22}, β_{31} y β_{32} son mayores que cero y β_{13} es menor que cero.

Para identificar el modelo se debe tener en cuenta que el sistema tiene cuatro variables endógenas ($C_t \; Y_t \; T_t \; I_t$) y dos variables exógenas ($Y_{t-1} \; G_t$); es decir, G=4 y K=2.

En primer lugar, se reexpresa el modelo en una tabla de doble entrada, indicando las presencias y ausencias de las variables en cada ecuación:

Ecuación	Variables endógenas				Ordenada	Variables exógenas	
	C_t	Y_t	T_t	I_t		Y_{t-1}	G_t
1	1	1	1	0	1	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0
3	0	1	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0	0	1

Condición de **orden**: observando la tabla de presencias y ausencias se tiene

Ecuación	$K-k$	$g-1$	
1	2-0	3-1	2=2 $\rightarrow$ Exactamente Identificada
2	2-1	1-1	1>0 $\rightarrow$ Sobreidentificada
3	2-0	2-1	2>1 $\rightarrow$ Sobreidentificada
4	No tiene parámetros, no se somete al análisis		

Condición de **rango**: se reexpresa la tabla de presencias y ausencias. La condición de rango indica que: Rango $[\mathbf{A}_i] = G - 1$. Donde $[A_i]$ simboliza la submatriz correspondiente a la ecuación i.

Para armar la submatriz se anula la fila correspondiente a la ecuación y las columnas de las variables incluidas en la ecuación; para la ecuación 1 es:

Ecuación	C_t	Y_t	T_t	I_t	Ordenada	Y_{t-1}	G_t
1	1	1	1	0	1	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0
3	0	1	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0	0	1

La submatriz resultante es

Ecuación	I_t	Y_{t-1}	G_t
2	1	1	0
3	0	0	0
4	1	0	1

la que tiene rango igual a 2. Entonces:

Rango $[\mathbf{A}_1] = 2$ y $G - 1 = 3$ $\rightarrow$ Rango $[\mathbf{A}_1] < G - 1$ $\rightarrow$ No identificada

En la ecuación 2, la submatriz resultante es

Ecuación	C_t	Y_t	T_t	G_t
1	1	1	1	0
3	0	1	1	0
4	1	1	0	1

La cual tiene rango igual a 3. Entonces:

Rango $[\mathbf{A}_2] = 3$ y $G - 1 = 3$ $\rightarrow$ Rango $[\mathbf{A}_2] = G - 1$ $\rightarrow$ Identificada

En la ecuación 3, la submatriz resultante es

Ecuación	C_t	I_t	Y_{t-1}	G_t
1	1	0	0	0
2	0	1	1	0
4	1	1	0	1

La cual tiene rango igual a 3. Entonces:

Rango $[\mathbf{A}_3] = 3$ y $G - 1 = 3$ $\rightarrow$ Rango $[\mathbf{A}_3] = G - 1$ $\rightarrow$ Identificada

La falta de identificación de una ecuación da lugar a que los coeficientes estructurales del modelo no puedan ser estimados. Citando a Andrew Harvey, Gujarati dice que, por lo general, la condición de orden es suficiente para asegurar la identificabilidad y que la no verificación de la condición de rango raramente resultará en un desastre (Gujarati, 2006. p.726)

Entonces, se puede concluir que si la ecuación cumple con:

ORDEN	RANGO	ECUACIÓN IDENTIFICADA (exactamente o sobre)
SI	SI	SI
SI	NO	NO
NO	-	NO

El sistema está identificado si todas las ecuaciones están identificadas. Si alguna ecuación no lo estuviera, se puede reespecificar el modelo para que sea identificado.

También puede ser válido estimar un sistema donde algunas ecuaciones no estén identificadas, si es que los coeficientes de la forma estructural de estas ecuaciones no resultan de interés en el marco de la investigación.

21.4 Análisis estático comparativo

El análisis estático comparativo permite hallar las condiciones bajo las cuales el modelo se desplaza de una situación de equilibrio a otra. Para esto analiza como se comportan las variables endógenas del modelo ante cambios en las variables exógenas.

Este análisis hace uso del teorema de la función implícita. Una función definida como

$$y = f(x) \qquad [5]$$

Independientemente de cómo sea $f(x)$ se denomina explícita, porque está identificada la variable dependiente y el conjunto de explicativas relacionadas a través de la forma funcional.

Si se reescribe (5) de la forma

$$y - f(x) = 0 \qquad [6]$$

Ya no se tiene una función explícita, ahora (5) está definida en forma implícita por (6) aun cuando no sea posible identificar a las variables endógenas y a las explicativas ni a la forma funcional.

La manera correcta de expresar (6) es

$$F(y, x) = 0 \qquad [7]$$

Siempre es posible expresar (7) a partir de (5), pero no siempre es posible expresar (5) a partir de (7); esto depende si se está en presencia de una expresión con funciones definidas en otra forma general.

Teorema de la función implícita

El teorema de la función implícita establece que dada una ecuación

$$F(y, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \qquad [8]$$

Define una función implícita alrededor de un punto específico en el dominio

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad [9]$$

Si dado (8)

a) La función F tiene derivadas parciales continuas F_Y, F_1, ..., F_m
b) En un punto $(y_0, x_{10}, \dots, x_{m0})$ que satisface (8), $F_y \neq 0$ entonces existe una vecindad N que resulta m dimensional alrededor de $(x_{10}, \dots, x_{m0})$ en la cual y es función definida implícitamente de las variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en la forma (9).

Esta función implícita satisface

$$y_0 = f(x_{10}, \dots, x_{m0}) \qquad [10]$$

$$F(y, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \qquad [11]$$

En la vecindad N dándole a (11) el estatus de una identidad en esa vecindad. Además, la función implícita f es continua y tiene derivadas parciales continuas $f_1 \dots f_m$.

La extensión de este teorema al caso de ecuaciones simultáneas establece que: un conjunto de ecuaciones simultáneas

$$\begin{matrix} F^1(y_1 \dots y_n; x_1 \dots x_m) = 0 \\ F^2(y_1 \dots y_n; x_1 \dots x_m) = 0 \\ \vdots \\ F^n(y_1 \dots y_n; x_1 \dots x_m) = 0 \end{matrix} \qquad [12]$$

Define un conjunto de funciones implícitas

$$\begin{matrix} y_1 = f^1(x_1, \dots, x_m) \\ y_2 = f^2(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ y_n = f^n(x_1, \dots, x_m) \end{matrix} \qquad [13]$$

Dado el sistema (12), si

a) Todas las funciones tienen derivadas F^1, …, F^m respecto a todas las variables y y x
b) En un punto $(y_{10} \dots y_{n0}; x_{10} \dots x_{m0})$ que satisface (12) el determinante jacobino es distinto de cero.

$$|J| \equiv \left|\frac{\partial(F^1 \dots F^n)}{\partial(y_1 \dots y_n)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \frac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \qquad [14]$$

Entonces existe una vecindad m-dimensional de $(x_{10} \dots x_{m0})$, N, en la cual las variables $y_1 \dots y_n$ son funciones de las variables $x_1, \dots, x_m$ en la forma (13).

Estas funciones implícitas satisfacen

$$\begin{matrix} y_{10} = f^1(x_{10}, \dots, x_{m0}) \\ y_{20} = f^2(x_{10}, \dots, x_{m0}) \\ \vdots \\ y_{n0} = f^n(x_{10}, \dots, x_{m0}) \end{matrix}$$

También satisfacen (13) en el entorno de toda m-tupla $(x_1, \dots, x_m)$, por lo tanto (12) tiene el estatus de identidad en la vecindad.

Además, las funciones implícitas $f^1, \ldots, f^n$ son continuas y tienen derivadas parciales continuas respecto de la variable X.

Ejemplo 21.5. Modelo keynesiano de determinación de los ingresos

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_t &= \beta_{11} + \beta_{12}\mathbf{Y}_t + \beta_{13}\mathbf{T}_t \\ \mathbf{I}_t &= \beta_{21} + \beta_{22}\mathbf{Y}_{t-1} \\ \mathbf{T}_t &= \beta_{31} + \beta_{32}\mathbf{Y}_t \\ \mathbf{Y}_t &= \mathbf{C}_t + \mathbf{I}_t + \mathbf{G}_t \end{aligned} \qquad (15)$$

Donde: $\mathbf{C}_t$ (Consumo), $\mathbf{Y}_t$ (Ingreso), $\mathbf{T}_t$ (Impuestos) e $\mathbf{I}_t$ (Inversión) son variables endógenas del sistema. En este caso particular, coinciden las variables endógenas con las variables dependientes del modelo; esto no siempre ocurre, puede haber en el sistema variables endógenas que no asuman el rol de variable dependiente.

Las variables exógenas son: $\mathbf{G}_t$ (Gasto público) y $\mathbf{Y}_{t-1}$ (Ingreso del periodo anterior). Las variables exógenas siempre son explicativas y nunca dependientes; mientras que, las variables endógenas pueden ser explicativas.

Las hipótesis sobre los parámetros del modelo afirman que β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22}, β_{31} y β_{32} son mayores que cero y β_{13} es menor que cero.

Con esta información se definen las funciones implícitas de las variables endógenas respecto de las exógenas y los parámetros

$$\begin{aligned}
C^* &= f^1(Y_{t-1}, G_t; \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{31}, \beta_{32}) \\
I^* &= f^2(Y_{t-1}, G_t; \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{31}, \beta_{32}) \\
T^* &= f^3(Y_{t-1}, G_t; \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{31}, \beta_{32}) \\
Y^* &= f^4(Y_{t-1}, G_t; \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{31}, \beta_{32})
\end{aligned} \qquad [16]$$

El conjunto de derivadas parciales que se obtienen a partir de (16) se las denomina derivadas de estática comparativa:

$$\begin{matrix}
\frac{\partial C^*}{\partial Y_{t-1}} & \frac{\partial C^*}{\partial G_t} & \frac{\partial C^*}{\partial \beta_{11}} & \cdots & \frac{\partial C^*}{\partial \beta_{32}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial Y^*}{\partial Y_{t-1}} & \frac{\partial Y^*}{\partial G_t} & \frac{\partial Y^*}{\partial \beta_{11}} & \cdots & \frac{\partial Y^*}{\partial \beta_{32}}
\end{matrix} \qquad [17]$$

Para llegar a las derivadas planteadas en (17), es necesario reescribir (15):

$$\begin{gathered}
C_t - \beta_{11} - \beta_{12} Y_t - \beta_{13} T_t = 0 \\
I_t - \beta_{21} - \beta_{22} Y_{t-1} = 0 \\
T_t - \beta_{31} - \beta_{32} Y_t = 0 \\
Y_t - C_t - I_t - G_t = 0
\end{gathered} \qquad [18]$$

En (18) se aplica diferencial total, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial F^i}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial F^i}{\partial y_n} dy_n + \frac{\partial F^i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F^i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F^i}{\partial x_m} dx_m$$

$$\forall i = 1 \dots n$$

siendo F^i la representación de cada ecuación. Entonces

$$\frac{\partial C}{\partial C} dC + \frac{\partial(-\beta_{11})}{\partial \beta_{11}} d\beta_{11} + \frac{\partial(-\beta_{12} Y_t)}{\partial Y_t} dY_t + \frac{\partial(-\beta_{12} Y_t)}{\partial \beta_{12}} d\beta_{12} + \frac{\partial(-\beta_{13} T_t)}{\partial T_t} dT_t + \frac{\partial(-\beta_{13} T_t)}{\partial \beta_{13}} d\beta_{13} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial I} dI + \frac{\partial(-\beta_{21})}{\partial \beta_{21}} d\beta_{21} + \frac{\partial(-\beta_{22} Y_{t-1})}{\partial Y_{t-1}} dY_{t-1} + \frac{\partial(-\beta_{22} Y_{t-1})}{\partial \beta_{22}} d\beta_{22} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial T} dT + \frac{\partial(-\beta_{31})}{\partial \beta_{31}} d\beta_{31} + \frac{\partial(-\beta_{32} Y_t)}{\partial Y_t} dY_t + \frac{\partial(-\beta_{32} Y_t)}{\partial \beta_{32}} d\beta_{32} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Y}dY + \frac{\partial(-C)}{\partial C}dC + \frac{\partial(-I)}{\partial I}dI + \frac{\partial(-G)}{\partial G}dG = 0$$

Resolviendo

$$\begin{gathered} 1dC - \beta_{12}dY_t - Y_t d\beta_{12} - \beta_{13}dT_t - T_t d\beta_{13} - 1d\beta_{11} = 0 \\ 1dI - d\beta_{21} - \beta_{22}dY_{t-1} - Y_{t-1}d\beta_{22} = 0 \\ 1dT - 1d\beta_{31} - \beta_{32}dY_t + Y_t d\beta_{32} = 0 \\ 1dY - 1dC - 1dI - 1dG = 0 \end{gathered} \qquad [20]$$

Ahora es necesario separar lo endógeno de lo exógeno:

$$\begin{aligned} dC - \beta_{12}dY_t - \beta_{13}dT_t &= d\beta_{11} + Y_t d\beta_{12} + T_t d\beta_{13} \\ dI &= d\beta_{21} + \beta_{22}dY_{t-1} + Y_{t-1}d\beta_{22} \\ dT - \beta_{32}dY_t &= -1d\beta_{31} + Y_t d\beta_{32} \\ dY - dC - dI &= dG \end{aligned} \qquad [21]$$

En el segundo miembro se tienen las fuerzas exógenas que harán que el sistema se mueva de una situación de equilibrio a otra. Estas fuerzas exógenas no es posibles hacerlas variar todas al mismo tiempo, sino que se debe considerar el cambio en sólo una de ellas por vez.

Si el interés está centrado en conocer qué pasa con un cambio en la política fiscal, se tiene:

$$dG \neq 0$$

y $d\beta_{11} = d\beta_{12} = d\beta_{13} = d\beta_{21} = d\beta_{22} = d\beta_{31} = d\beta_{32} = dY_{t-1} = 0$

Con estas condiciones, (21) se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dC - \beta_{12}dY_t - \beta_{13}dT_t &= 0 \\ dI &= 0 \\ dT - \beta_{32}dY_t &= 0 \\ dY - dC - dI &= dG \end{aligned} \qquad [22]$$

Ahora se divide (22) por dG:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dG} - \beta_{12}\frac{dY_t}{dG} - \beta_{13}\frac{dT_t}{dG} &= 0 \\ \frac{dI}{dG} &= 0 \\ \frac{dT}{dG} - \beta_{32}\frac{dY_t}{dG} &= 0 \\ \frac{dY}{dG} - \frac{dC}{dG} - \frac{dI}{dG} &= \frac{dG}{dG} \end{aligned} \qquad [23]$$

En álgebra de matrices

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\beta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_{32} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} dC/dG \\ dY/dG \\ dT/dG \\ dI/dG \end{bmatrix}}_{\text{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{b}} \qquad [24]$$

A es el jacobino, el cual tiene que ser distinto de cero para que el sistema tenga solución. El determinante se calcula a partir de la expansión de Laplace:

$$|\mathrm{A}| = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}|C_{ij}|$$

Donde n es el número de filas o columnas que tiene la matriz. Estratégicamente se trabajará con la segunda fila:

$$|\mathbf{A}| = b_{21}|C_{21}| + b_{22}|C_{22}| + b_{23}|C_{23}| + b_{24}|C_{24}|$$

donde sólo es distinto de cero el elemento b_{24}, de modo que

$$|\mathbf{A}| = b_{24}|C_{24}|$$

Donde

$$|C_{24}| = (-1)^{i+j}|M_{ij}| = (-1)^{6}\begin{vmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ 0 & -\beta_{32} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1[\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1]$$

$$|C_{24}| = 1[\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1] \qquad [25]$$

Entonces:

$$|\mathbf{A}| = b_{24}|C_{24}| = 1 * 1[\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1]$$

$$|\mathbf{A}| = \beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1$$

Al ser el determinante jacobino distinto de cero, el sistema tiene solución. Las derivadas de estática comparativa se encuentran por la Regla de Cramer:

$$\frac{dC}{dG} = \frac{|\mathrm{A_C}|}{|\mathrm{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\beta_{12} & -\beta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_{32} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1} = \frac{(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -\beta_{12} & -\beta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta_{32} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1}$$

$$\frac{dC}{dG} = \frac{(-1)^5[\beta_{13}\beta_{32} + \beta_{12}]}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1} = \frac{-\beta_{13}\beta_{32} - \beta_{12}}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1}$$

$$\frac{dY}{dG} = \frac{|\mathrm{A_Y}|}{|\mathrm{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\beta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1} = \frac{(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & -\beta_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1}$$

$$\frac{dY}{dG} = \frac{-1}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1}$$

$$\frac{dT}{dG} = \frac{|\mathrm{A_T}|}{|\mathrm{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\beta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_{32} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1} = \frac{(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & -\beta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1}$$

$$\frac{dT}{dG} = \frac{(-1)(\beta_{32})}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1} = \frac{-\beta_{32}}{\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{13} - 1}$$

$$\frac{dI}{dG}=\frac{|\mathrm{A_I}|}{|\mathrm{A}|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -\beta_{12} & -\beta_{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\beta_{32} & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}}{\beta_{12}+\beta_{32}\beta_{13}-1}=\frac{(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1 & -\beta_{12} & -\beta_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -\beta_{32} & 1\end{vmatrix}}{\beta_{12}+\beta_{32}\beta_{13}-1}$$

$$\frac{dI}{dG}=\frac{0}{\beta_{12}+\beta_{32}\beta_{13}-1}=0$$

En síntesis, se tiene:

$$\frac{dC}{dG}=\frac{-\beta_{13}\beta_{32}-\beta_{12}}{\beta_{12}+\beta_{32}\beta_{13}-1}\quad \frac{dY}{dG}=\frac{-1}{\beta_{12}+\beta_{32}\beta_{13}-1}\quad \frac{dT}{dG}=\frac{-\beta_{32}}{\beta_{12}+\beta_{32}\beta_{13}-1}\quad \frac{dI}{dG}=0 \quad (26)$$

Aplicando en (26) las condiciones para los parámetros dadas en (15): β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22}, β_{31} y β_{32} son mayores que cero y β_{13} es menor que cero, se tiene que:

$$\frac{dC}{dG}=\frac{-\beta_{13}\beta_{32}-\beta_{12}}{\beta_{12}+\beta_{32}\beta_{13}-1}=\frac{-(-\,+)-(+)}{(+)+(+\,-)-1}=\frac{>0\ \ si\ (-\beta_{13}\beta_{32})>\beta_{12}}{<0}$$

$$\frac{dC}{dG}=\begin{cases}<0\ \ si\ (-\beta_{13}\beta_{32})>\beta_{12}\\ >0\ \ si\ (-\beta_{13}\beta_{32})<\beta_{12}\end{cases}$$

Con el resto de variables endógenas se procede de igual manera

21.5 Prueba de Simultaneidad

Si las ecuaciones integrantes de un modelo multiecuacional no son simultáneas, el método de mínimos cuadrados ordinarios produce estimadores consistentes y eficientes, pero si hay presencia de simultaneidad, los estimadores consistentes y eficientes se obtienen a través de mínimos cuadrados en dos etapas y variables instrumentales.

La simultaneidad surge cuando las variables endógenas aparecen como explicativas, esto da lugar a que aparezca correlación entre el término de error y las variables explicativas.

Para saber en qué situación se encuentra el modelo, se puede utilizar la prueba de error de especificación de Hausman. La prueba consiste en

1. Estimar las ecuaciones de todas las endógenas que aparecen como explicativas, respecto de todas las exógenas.
2. Obtener, en cada una de estas estimaciones, los valores estimados de las variables endógenas y de los errores.
3. Estimar la ecuación donde aparecen las endógenas como explicativas; introduciendo el error de estimación del punto 1 y reemplazando las endógenas explicativas por la estimación del punto 1.
4. Evaluar la significatividad del término de error utilizado como variable explicativa. Si es significativo se acepta la hipótesis de simultaneidad, por ende hay correlación entre las variables explicativas y el término de error; el MCO no

se aconseja para la estimación porque dará estimadores no consistentes.

La presencia de variables endógenas en el sistema explicando el comportamiento de otras variables endógenas, da lugar a que la estimación por mínimos cuadrados ordinarios arroje estimadores sesgados e inconsistentes. Por esto, a la hora de estimar un sistema de ecuaciones se cuenta con el conjunto de métodos descriptos en el próximo capítulo; el utilizar uno u otro depende del resultado de la identificación y de la prueba de simultaneidad.

Ejemplo 21.6. Modelo Keynesiano de determinación de los ingresos

Retomando el modelo del Ejemplo 21.5, se tienen 4 variables endógenas pero sólo 2 de ellas explican en sendas ecuaciones el comportamiento de otra endógena. Es el caso de T_t y Y_t.

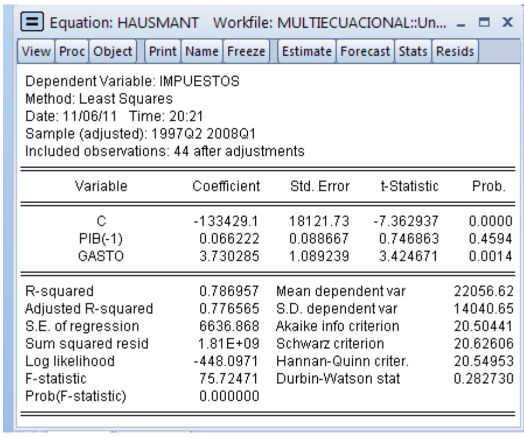
Antes de hacer la estimación, es necesario analizar la simultaneidad de las ecuaciones. Esta surge cuando las variables endógenas son explicativas en otra ecuación, lo que da lugar a que aparezca correlación entre el término de error y las variables explicativas. En el modelo especificado ocurre esto con Y_t e T_t.

Para realizar la prueba de simultaneidad de Hausman se debe proceder de la siguiente manera:

1) Estimar por mínimos cuadrados ordinarios

$$T_t = f(Y_{t-1}, G_t)$$

$$Y_t = f(Y_{t-1}, G_t)$$



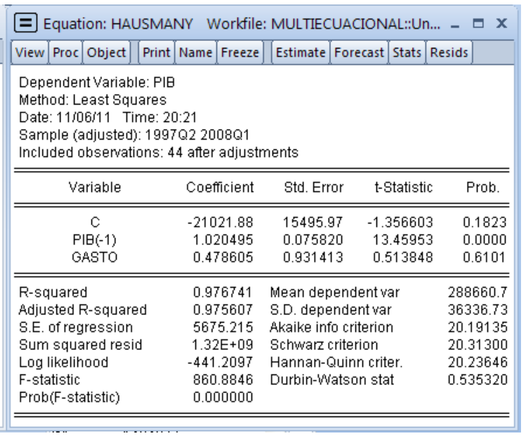
Equation: HAUSMANT Workfile: MULTIECUACIONAL::Un...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: IMPUESTOS
Method: Least Squares
Date: 11/06/11 Time: 20:21
Sample (adjusted): 1997Q2 2008Q1
Included observations: 44 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-133429.1	18121.73	-7.362937	0.0000
PIB(-1)	0.066222	0.088667	0.746863	0.4594
GASTO	3.730285	1.089239	3.424671	0.0014

R-squared	0.786957	Mean dependent var	22056.62
Adjusted R-squared	0.776565	S.D. dependent var	14040.65
S.E. of regression	6636.868	Akaike info criterion	20.50441
Sum squared resid	1.81E+09	Schwarz criterion	20.62606
Log likelihood	-448.0971	Hannan-Quinn criter.	20.54953
F-statistic	75.72471	Durbin-Watson stat	0.282730
Prob(F-statistic)	0.000000		



Equation: HAUSMANY Workfile: MULTIECUACIONAL::Un...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: PIB
Method: Least Squares
Date: 11/06/11 Time: 20:21
Sample (adjusted): 1997Q2 2008Q1
Included observations: 44 after adjustments

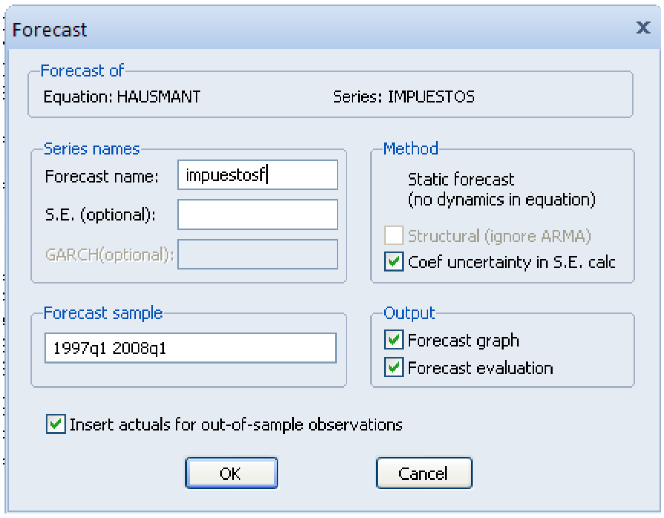
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-21021.88	15495.97	-1.356603	0.1823
PIB(-1)	1.020495	0.075820	13.45953	0.0000
GASTO	0.478605	0.931413	0.513848	0.6101

R-squared	0.976741	Mean dependent var	288660.7
Adjusted R-squared	0.975607	S.D. dependent var	36336.73
S.E. of regression	5675.215	Akaike info criterion	20.19135
Sum squared resid	1.32E+09	Schwarz criterion	20.31300
Log likelihood	-441.2097	Hannan-Quinn criter.	20.23646
F-statistic	860.8846	Durbin-Watson stat	0.535320
Prob(F-statistic)	0.000000		

2) En cada ecuación obtener

$$\hat{T}_t \qquad \hat{e}_T \qquad \hat{Y}_t \qquad \hat{e}_Y$$

El valor estimado de las variables endógenas se obtiene desde la ventana de estimación de cada ecuación, a través de la opción Forecast. En *Series name* debe indicarse el nombre de la variable endógena estimada, se acostumbra agregar una f al nombre original de la variable; en este ejemplo se denominan, respectivamente, impuestosf y pibf.



El valor estimado de los residuos se obtiene desde la ventana de estimación de cada ecuación a través de *Proc-Make residual-Series*, y se denominan errort y errorpib

3) Estimar $C_t = f(\hat{Y}_t, \hat{T}_t, e_Y, e_T)$

$$T_t = f(\hat{Y}_t, e_Y)$$

Se observa que las ecuaciones a estimar son aquellas en las que las variables endógenas asumen el rol de explicativas.

Equation: HAUSMANC Workfile: MULTIECUACIONAL::Untitle...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: CONSUMO
Method: Least Squares
Date: 11/06/11 Time: 20:48
Sample (adjusted): 1997Q2 2008Q1
Included observations: 44 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	305014.7	18734.45	16.28096	0.0000
PIBF	-0.557948	0.069976	-7.973395	0.0000
IMPUESTOSF	2.937447	0.166813	17.60924	0.0000
ERRORPIB	0.156775	0.186567	0.840314	0.4059
ERRORT	1.056028	0.262683	4.020156	0.0003

R-squared	0.957173	Mean dependent var	193599.1
Adjusted R-squared	0.952780	S.D. dependent var	22796.41
S.E. of regression	4953.680	Akaike info criterion	19.96029
Sum squared resid	9.57E+08	Schwarz criterion	20.16304
Log likelihood	-434.1265	Hannan-Quinn criter.	20.03548
F-statistic	217.9093	Durbin-Watson stat	1.353836
Prob(F-statistic)	0.000000		

Equation: UNTITLED Workfile: MULTIECUACIONAL::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: IMPUESTOS
Method: Least Squares
Date: 11/06/11 Time: 20:49
Sample (adjusted): 1997Q2 2008Q1
Included observations: 44 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-96537.00	6818.972	-14.15712	0.0000
PIBF	0.375522	0.021473	17.48805	0.0000
ERRORPIB	0.259255	0.133079	1.948123	0.0583

R-squared	0.891287	Mean dependent var	22056.62
Adjusted R-squared	0.885984	S.D. dependent var	14040.65
S.E. of regression	4740.994	Akaike info criterion	19.83163
Sum squared resid	9.22E+08	Schwarz criterion	19.95328
Log likelihood	-433.2958	Hannan-Quinn criter.	19.87674
F-statistic	168.0707	Durbin-Watson stat	0.325066
Prob(F-statistic)	0.000000		

4) Evaluar la significatividad de los coeficientes que acompañan a e_y y e_T. En la ecuación de consumo es significativo el error de la ecuación de impuestos; en la ecuación de impuestos es significativo el error de la ecuación de pib.

Al ser significativos los errores se acepta la hipótesis de simultaneidad. Esto lleva a utilizar el método de mínimos cuadrados en dos etapas para la estimación del modelo porque permite obtener estimadores consistentes y eficientes.

CASOS DE ESTUDIO, PREGUNTAS Y PROBLEMAS

Caso 21.1: Las relaciones macroeconómicas de la responsabilidad social corporativa.

En el mundo desarrollado la discusión pública, acerca de las responsabilidades empresariales, está en debate plenamente; también la sociedad en su conjunto está tomando conciencia de su importancia, especialmente por la relación que se establece entre la responsabilidad social corporativa y los problemas de exclusión, pobreza e iniquidad social.

El concepto de desarrollo sostenible ofrece la visión de una sociedad más próspera y justa y que promete un medio ambiente más limpio, seguro y sano, por lo que es necesaria una mayor relación entre los objetivos de crecimiento económico y de progreso social, con una actitud permanente de máximo respeto al medio ambiente, estas decisiones definen un nuevo marco general de responsabilidad de las empresas.

La responsabilidad social corporativa involucra valores éticos que hasta hace unas décadas no se relacionaban con el actuar de los negocios. En general, el rol de las empresas estaba asociado a la acumulación de riquezas, proporcionar empleo y cumplir con normativas y leyes, especialmente tributarias; sin embargo, hoy se entiende la empresa como un sujeto o actor social, con un nuevo rol dentro de la sociedad.

Como lo menciona Rebolledo Moller (2004), las empresas que asumen su responsabilidad social entiende que, ser *empresa ciudadana,* significa poseer una cultura organizativa que otorgue coherencia al negocio, con un sistema de valores reconocidos públicamente por la organización empresarial; lo cual significa tener una ética compartida por todos sus miembros, que le otorga identidad y un sentido de trascendencia al proyecto empresarial en ejecución, el cual se inserta en un espacio mayor, que posibilita la sustentabilidad social y ambiental de la economía.

La responsabilidad social corporativa debe entenderse como una estrategia empresarial; para hacer buenos negocios se deben elevar la calidad de vida y los niveles de ingresos de la población más vulnerable, lo que permitiría superar la pobreza humana y la pobreza material a partir de un aumento en el bienestar y en el poder adquisitivo de la población.

La responsabilidad social empresarial es la contribución al desarrollo humano sostenible, a través del compromiso y confianza del empresariado con sus empleados y familia, la sociedad en general y la comunidad local, en pos de mejorar su capital social y calidad de vida.

El desarrollo humano postula que la persona es el sujeto, el fin, y al mismo tiempo el beneficiario del desarrollo. A esta afirmación, enunciada por Mahbub ul Haq y Amartya Sen, y citada por Ortega (2002), le sucede la que considera que no se puede seguir con la idea de que el desarrollo es el crecimiento material; el desarrollo tiene un fin, tiene una orientación, tiene un sentido, el desarrollo se orienta a que el ser humano sea centro, actor, sujeto y beneficiario de los esfuerzos sociales por expandir la demanda material y espiritual de las personas.

La responsabilidad social y el desarrollo humano deben lograr expresarse en los desafíos de la realidad de las familias, en las empresas, en el entorno social de éstas, en la manera de establecer relaciones laborales, en la manera en que los distintos actores viven y valoran la existencia de los otros. La valoración del otro es una actitud y un comportamiento indispensable para la propia realización. Así se va creando un tejido de solidaridad y reciprocidad, de justicia y de dignidad, que enriquece toda la vida social.

Se comparte la visión de que la responsabilidad social corporativa implica a todos los agentes, sean públicos y privados, en virtudes cívicas que respeten la ética de la transparencia y de la probidad. Ello es una condición para crear un clima de confianza en una comunidad; una ética del desarrollo humano debe plasmarse en cuatro ámbitos específicos:

- Uno es el ámbito de la empresa, el ámbito del ser, de ser ella misma, de construir su propia evolución y de ser responsable de esa evolución sin afectar a los demás.
- El segundo ámbito del desarrollo humano y la ética de la responsabilidad social corporativa es también una ética del otro, de las relaciones de la empresa con los otros.
- Hay un tercer ámbito en donde se juega la perspectiva normativa del desarrollo humano. Se trata de los ámbitos macrosociales como la comuna, la región, el país; y lo que hoy llamamos el mundo global.
- El cuarto ámbito se refiere a la necesidad de una ética en la relación de la empresa con la naturaleza.

Por otra parte, la responsabilidad social corporativa, en términos de mercado, puede asimilarse a un precio sombra; en este sentido, es el valor de intermediación entre las demandas de la sociedad, medidas en términos de desarrollo humano, y la oferta de bienes de las empresas, medidas en términos de crecimiento del producto. Un alto nivel de responsabilidad social corporativa se conjuga con altos niveles de crecimiento del producto y alto nivel de desarrollo humano; si la responsabilidad social es baja, el desarrollo humano de la sociedad va a mantenerse bajo y los niveles de producto, aún a niveles elevados, no alcanzarán a compensar la pérdida de bienestar derivada de aquella caída.

De acuerdo a esto se postula que:

- El crecimiento en la oferta de bienes tiene una relación directa con la responsabilidad social corporativa observada con anterioridad y la relación capital trabajo existente en la economía.

- El desarrollo humano está influenciado por la responsabilidad social corporativa y la relación capital trabajo.
- La responsabilidad social corporativa se acumula a través del tiempo y su nivel actual se ajusta por las diferencias en los niveles de desarrollo humano observados y la oferta de bienes.
- El desarrollo humano y el producto físico del trabajo posibilitan en el largo plazo el crecimiento continuo de la responsabilidad social corporativa.

Por consiguiente se considera, en un todo de acuerdo con Somoza Lopez y Vallverdu Calafell (2006), que la responsabilidad social corporativa lejos de ser una moda, es el resultado de considerar a la empresa plenamente y verdaderamente integrada en la sociedad que se desenvuelve, en un contexto en el que se aplica, en sentido amplio, la relación costo beneficio social.

La expresión analítica del modelo a estudiar es:

$$PL_t = \alpha_1 + \alpha_2 RSC_{t-1} + \alpha_3 KL_t$$
$$DH_t = \beta_1 + \beta_2 RSC_t + \beta_3 KL_t$$
$$RSC_t = RSC_{t-1} + \gamma_1 (DH_{t-1} - PL_t)$$

donde

<u>variables endógenas:</u>

PL_t, producto físico medio del trabajo

RSC_t, responsabilidad social corporativa

DH_t, desarrollo humano

Variables exógenas o predeterminadas

KL_t, relación capital trabajo

RSC_{t-1}, responsabilidad social corporativa observada

DH_{t-1}, desarrollo humano observado

parámetros

α_1, nivel promedio del producto físico del trabajo, $\alpha_1 < 0$

α_2, respuesta del producto medio del trabajo a los cambios en la responsabilidad social corporativa, $\alpha_2 > 0$

α_3, respuesta del producto medio del trabajo a los cambios en la relación capital trabajo, $\alpha_3 > 0$

β_1, nivel promedio de desarrollo humano, $\beta_1 > 0$

β_2, respuesta del desarrollo humano ante cambios en la responsabilidad social corporativa, $\beta_2 > 0$

β_3, respuesta del desarrollo humano ante cambios en la relación capital trabajo, $\beta_3 > 0$

γ_1, coeficiente de ajuste, $\gamma_1 > 0$

En este modelo, la relación beneficio costo social queda definida por la diferencia entre el desarrollo humano observado en el periodo anterior y el producto físico medio del trabajo de este periodo; por lo que el coeficiente γ_1 mide la respuesta de la responsabilidad social corporativa ante cambios en la relación beneficio costo social.

A partir del modelo económico planteado:

1. Encuentre las derivadas de estática comparativa
2. Analice la trayectoria temporal de la responsabilidad social corporativa
3. Verifique las condiciones de orden y rango para identificar el modelo

Caso 21.2: Modelo macroeconómico

Dado el modelo multiecuacional

$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t - \alpha_3 T_t + \alpha_4 R_t + \varepsilon_{1t}$	consumo
$I_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 R_t + \varepsilon_{2t}$	inversión
$Y_t = C_t + I_t + G_t$	identidad
$M_t = \gamma_1 + \gamma_2 Y_t + \gamma_3 R_t + \gamma_4 P_t + \varepsilon_{4t}$	preferencia de liquidez
$Y_t = \delta_1 + \delta_2 N_t + \varepsilon_{5t}$	función de producción
$N_t = \lambda_1 + \lambda_2 W_t + \lambda_3 P_t + \varepsilon_{6t}$	demanda de trabajo
$N_t = \lambda_1 + \lambda_2 W_t + \lambda_3 P_t + \varepsilon_{7t}$	oferta de trabajo

A. Indique las variables endógenas y exógenas que tiene el modelo

B. Compruebe las condiciones de identificación del modelo

C. Analizar la estática comparativa del modelo

Caso 21.3: Modelo de mercado

Se considera un mercado de un solo producto donde, bajo el supuesto de linealidad, el modelo que lo representa viene dado por las ecuaciones de demanda y oferta

$$\begin{aligned} Q + \beta_{12}P + \gamma_{10} &= \varepsilon_{1t} \\ Q + \beta_{22}P + \gamma_{20} &= \varepsilon_{2t} \end{aligned} \qquad (1)$$

Los parámetros γ_{10} y γ_{20} representan la demanda y la oferta autónoma, son constantes en cada ecuación. Reexpresando (1) para separar lo endógeno de lo exógeno en el sistema

$$\begin{aligned} Q + \beta_{12}P &= -\gamma_{10} + \varepsilon_{1t} \\ Q + \beta_{22}P &= -\gamma_{20} + \varepsilon_{2t} \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 1 & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_{10} \\ -\gamma_{20} \end{bmatrix} [1] + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 1 & \beta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\gamma_{10} \\ -\gamma_{20} \end{bmatrix} [1] + \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 1 & \beta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \quad (4)$$

En notación compacta

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Para calcular $[\mathbf{A}^{-1}]$ se puede utilizar el método de la adjunta, por el cual

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} Adj(\mathbf{A}) = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\left[(-1)^{i+j}|M_{ij}|\right]'$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 1 & \beta_{22} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |\mathbf{A}| = \beta_{22} - \beta_{12} \qquad Adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \beta_{22} & -1 \\ -\beta_{12} & 1 \end{bmatrix}'$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{22}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \frac{-\beta_{12}}{\beta_{22}-\beta_{12}} \\ \frac{-1}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \frac{1}{\beta_{22}-\beta_{12}} \end{bmatrix} \qquad [5]$$

De modo que

$$-\mathbf{A^{-1}B} = -\begin{bmatrix} \frac{\beta_{22}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \frac{-\beta_{12}}{\beta_{22}-\beta_{12}} \\ \frac{-1}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \frac{1}{\beta_{22}-\beta_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_{10} \\ -\gamma_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_{10}\beta_{22}-\gamma_{20}\beta_{12}}{\beta_{22}-\beta_{12}} \\ \frac{-\gamma_{10}+\gamma_{20}}{\beta_{22}-\beta_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{10} \\ \Pi_{20} \end{bmatrix} \qquad [6]$$

[6] expresa los coeficientes de la forma reducida con los que se puede expresar

$$\mathbf{Y} = \Pi\mathbf{X} + \omega \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{10} \\ \Pi_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \qquad [7]$$

En [1] se tiene el sistema estructural, en [7] el sistema reducido y en [6] el sistema de parámetros que relaciona los coeficientes del modelo estructural con los coeficientes del modelo reducido.

El sistema tiene 2 ecuaciones –demanda y oferta- y 4 incógnitas -β_{12}, β_{22}, γ_{10},γ_{20}- lo que da lugar a que el sistema de parámetros sea indeterminado y arroje infinitas soluciones, lo que indica que el sistema es inidentificable.

Observando [6] se concluye que no es posible obtener soluciones singulares para ninguna de las ecuaciones de [1], cada ecuación del sistema es inidentificable porque no hay parámetros nulos. Por lo tanto, el modelo [1] que es central en la Teoría Económica para explicar la formación del equilibrio en el mercado de un bien no puede cuantificarse en la realidad porque no es posible estimar los parámetros estructurales.

Primera reespecificación del modelo. Se supone que la oferta está influida por una variable exógena $\mathbf{Z}_1$

$$\begin{aligned} Q + \beta_{12}P + \gamma_{10} &= \varepsilon_1 \\ Q + \beta_{22}P + \gamma_{20} + \gamma_{21}Z_1 &= \varepsilon_2 \end{aligned} \qquad [8]$$

Trabajando algebraicamente como en el caso anterior se obtiene

$$Y = \underbrace{-A^{-1}B}_{\Pi} Z + B^{-1}\varepsilon$$

$$\Pi = -A^{-1}B = -\begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{22}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & -\dfrac{\beta_{12}}{\beta_{22}-\beta_{12}} \\ \dfrac{-1}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \dfrac{1}{\beta_{22}-\beta_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_{10} & 0 \\ -\gamma_{20} & -\gamma_{21} \end{bmatrix}$$

De modo que los parámetros reducidos serán

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{22}\gamma_{10}-\beta_{12}\gamma_{20}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \dfrac{-\beta_{12}\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}} \\ \dfrac{-\gamma_{10}+\gamma_{20}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \dfrac{\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{10} & \Pi_{11} \\ \Pi_{20} & \Pi_{21} \end{bmatrix} \qquad [9]$$

En [9] hay 4 ecuaciones -Π_{10}, Π_{11}, Π_{20}, Π_{21}- y 5 incógnitas -β_{12}, β_{22}, γ_{10}, γ_{20}, γ_{21}-. El sistema es indeterminado porque proporciona infinitas soluciones al modelo estructural pero hay parámetros que pueden estimarse. La solución para β_{12} y γ_{10} se obtiene al hacer

$$-\frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}} = -\frac{\frac{-\beta_{12}\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}}}{\frac{\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}}} = -\frac{-\beta_{12}\gamma_{21}}{\gamma_{21}} = \beta_{12} \qquad [10]$$

$$-\Pi_{10} - \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}}\Pi_{20} = \frac{-\beta_{22}\gamma_{10}-\beta_{12}\gamma_{20}}{\beta_{22}-\beta_{12}} + \beta_{12}\frac{\gamma_{10}+\gamma_{20}}{\beta_{22}-\beta_{12}}$$

$$= \frac{\beta_{22}\gamma_{10} - \beta_{12}\gamma_{20} + \beta_{12}\gamma_{10} + \beta_{12}\gamma_{20}}{\beta_{22} - \beta_{12}} = \frac{(\beta_{22} - \beta_{12})\gamma_{10}}{(\beta_{22} - \beta_{12})} = \gamma_{10} \qquad [11]$$

Con estos resultados la estimación de la función de demanda es posible porque tanto β_{12} como γ_{10} pueden determinarse. Esto significa que a pesar de ser inidentifcable todo el sistema, una de sus ecuaciones es exactamente identificable. La diferencia entre éste y el primer ejemplo es que en el primero todas las variables están en todas las ecuaciones mientras que en el segundo todas las variables no están en todas las ecuaciones.

Segunda Reespecificación del modelo. Ahora se le agregan al modelo de oferta y demanda dos variables exógenas Z1 y Z2 de modo que

$$\begin{aligned} Q + \beta_{12}P + \gamma_{10} + \gamma_{12}Z_2 = \varepsilon_1 \\ Q + \beta_{22}P + \gamma_{20} + \gamma_{21}Z_1 = \varepsilon_2 \end{aligned} \qquad [12]$$

Operando algebraicamente se obtiene

$$\Pi = -A^{-1}B = -\begin{bmatrix} \frac{\beta_{22}}{\beta_{22} - \beta_{12}} & -\frac{\beta_{12}}{\beta_{22} - \beta_{12}} \\ \frac{-1}{\beta_{22} - \beta_{12}} & \frac{1}{\beta_{22} - \beta_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_{10} & 0 & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{20} & -\gamma_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando el producto correspondiente

$$\Pi = B^{-1}\,\Gamma = -\begin{bmatrix} \frac{-\gamma_{10}\beta_{22} + \gamma_{20}\beta_{12}}{\beta_{22} - \beta_{12}} & \frac{\gamma_{21}\beta_{12}}{\beta_{22} - \beta_{12}} & \frac{-\gamma_{12}\beta_{22}}{\beta_{22} - \beta_{12}} \\ \frac{\gamma_{10} - \gamma_{20}}{\beta_{22} - \beta_{12}} & -\frac{\gamma_{21}}{\beta_{22} - \beta_{12}} & \frac{\gamma_{12}}{\beta_{22} - \beta_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{10} & \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{20} & \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} \mathrm{Q} &= \Pi_{10} + \Pi_{11} Z_1 + \Pi_{12} \mathrm{Z}_2 + \varepsilon_1 \\ \mathrm{Q} &= \Pi_{20} + \Pi_{21} Z_1 + \Pi_{22} \mathrm{Z}_2 + \varepsilon_2 \end{aligned} \qquad [13]$$

Donde se tienen 6 ecuaciones -Π_{10}, Π_{11}, Π_{20}, Π_{21}, Π_{12}, Π_{22}- y 6 incógnitas -β_{12}, β_{22}, γ_{10}, γ_{20}, γ_{12} γ_{21}-. Los coeficientes de la forma reducida se estiman por mínimos cuadrados ordinarios; resolviendo el sistema de parámetros se tienen los coeficientes de la forma estructural:

$$-\frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}} = -\frac{\frac{\beta_{12}\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}}}{\frac{-\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}}} = -\frac{\beta_{12}\gamma_{21}}{-\gamma_{21}} = \beta_{12}$$

$$-\Pi_{10} + \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}}\Pi_{20} = -\frac{-\beta_{22}\gamma_{10} - \beta_{12}\gamma_{20}}{\beta_{22} - \beta_{12}} + \beta_{12}\frac{\gamma_{10} + \gamma_{20}}{\beta_{22} - \beta_{12}}$$

$$= \frac{\beta_{22}\gamma_{10} + \beta_{12}\gamma_{20} + \beta_{12}\gamma_{10} + \beta_{12}\gamma_{20}}{\beta_{22} - \beta_{12}} = \frac{(\beta_{22} - \beta_{12})\gamma_{10}}{(\beta_{22} - \beta_{12})} = \gamma_{10}$$

$$-\frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}} = -\frac{\frac{-\gamma_{12}\beta_{22}}{\beta_{22}-\beta_{12}}}{-\frac{\gamma_{12}}{\beta_{22}-\beta_{12}}} = -\frac{\beta_{22}\gamma_{21}}{-\gamma_{21}} = \beta_{22}$$

$$-\Pi_{10} + \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}\Pi_{20} = -\frac{-\beta_{22}\gamma_{10} - \beta_{12}\gamma_{20}}{\beta_{22} - \beta_{12}} + \beta_{22}\frac{\gamma_{10} + \gamma_{20}}{\beta_{22} - \beta_{12}}$$

$$= \frac{\beta_{22}\gamma_{10} + \beta_{12}\gamma_{20} + \beta_{22}\gamma_{10} + \beta_{22}\gamma_{20}}{\beta_{22} - \beta_{12}} = \frac{(\beta_{22} - \beta_{12})\gamma_{20}}{(\beta_{22} - \beta_{12})} = \gamma_{20}$$

$$-\Pi_{12} + \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}}\Pi_{22} = -\frac{-\gamma_{12}\beta_{22}}{\beta_{22} - \beta_{12}} - \beta_{12}\left(-\frac{\gamma_{12}}{\beta_{22} - \beta_{12}}\right)$$

$$= \frac{\gamma_{12}\beta_{22} + \beta_{12}\gamma_{12}}{\beta_{22} - \beta_{12}} = \frac{(\beta_{22} - \beta_{12})\gamma_{12}}{(\beta_{22} - \beta_{12})} = \gamma_{212}$$

$$-\Pi_{11}+\frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}\Pi_{21}=-\frac{\beta_{12}\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}}-\beta_{22}\left(-\frac{\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}}\right)$$

$$=\frac{\beta_{12}\gamma_{21}+\beta_{22}\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}}=\frac{(\beta_{22}-\beta_{12})\gamma_{21}}{(\beta_{22}-\beta_{12})}=\gamma_{21}$$

Esto significa que el sistema estructural es exactamente identificable y también lo son sus relaciones o ecuaciones.

Tercera reespecificación del modelo. Se añade a la ecuación de oferta una nueva variable exógena Z_3y se supone que $\gamma_{10}=\gamma_{20}=0$

$$\begin{array}{c}\mathrm{Q}+\beta_{12}\mathrm{P}+\gamma_{12}\mathrm{Z}_2=\varepsilon_1\\ \mathrm{Q}+\beta_{22}\mathrm{P}+\gamma_{21}\mathrm{Z}_1+\gamma_{23}\mathrm{Z}_3=\varepsilon_2\end{array}\qquad [15]$$

De modo que

$$\Pi=-\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=-\begin{bmatrix}\frac{\beta_{22}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & -\frac{\beta_{12}}{\beta_{22}-\beta_{12}}\\ \frac{-1}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \frac{1}{\beta_{22}-\beta_{12}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \gamma_{12} & 0\\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23}\end{bmatrix}$$

Realizando el producto correspondiente

$$\Pi=\mathrm{B}^{-1}\,\Gamma=-\begin{bmatrix}\frac{-\gamma_{21}\beta_{12}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \frac{\gamma_{12}\beta_{22}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \frac{-\gamma_{23}\beta_{12}}{\beta_{22}-\beta_{12}}\\ \frac{\gamma_{21}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & -\frac{\gamma_{12}}{\beta_{22}-\beta_{12}} & \frac{\gamma_{23}}{\beta_{22}-\beta_{12}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13}\\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23}\end{bmatrix}\qquad [16]$$

Esto indica que

$$\begin{aligned} Q &= \Pi_{11} Z_1 + \Pi_{12} Z_2 + \Pi_{13} Z_3 + \varepsilon_1 \\ Q &= \Pi_{21} Z_1 + \Pi_{22} Z_2 + \Pi_{23} Z_3 + \varepsilon_2 \end{aligned} \qquad [17]$$

En [17] se tienen 6 ecuaciones y 5 incógnitas, lo que da lugar a que el sistema [15] sea superidentificable. El sistema de parámetros de [16] indica que

$$-\frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}} = \beta_{12} \ \rightarrow \ -\frac{\Pi_{13}}{\Pi_{23}} = \beta_{12}$$

$$-\frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}} = \beta_{22}$$

$$\gamma_{21} = -\Pi_{21}(\beta_{22} - \beta_{12}) \ \rightarrow \ \gamma_{21} = \frac{\Pi_{11}(\beta_{22} - \beta_{12})}{\beta_{12}}$$

$$\gamma_{12} = \Pi_{23}(\beta_{22} - \beta_{12}) \ \rightarrow \ \gamma_{12} = -\frac{\Pi_{12}(\beta_{22} - \beta_{12})}{\beta_{22}}$$

$$\gamma_{23} = -\Pi_{23}(\beta_{22} - \beta_{12}) \ \rightarrow \ \gamma_{23} = \frac{\Pi_{13}(\beta_{22} - \beta_{12})}{\beta_{12}}$$

Las dos ecuaciones son superidentificables porque, excepto para β_{22}, las soluciones son dobles.

A. Analizar la estática comparativa del modelo, proponiendo el conjunto de supuestos necesarios para los parámetros de la forma estructural.

Bibliografía

- Barbancho, Alfonso García. Fundamentos Y Posibilidades De La Econometría. Barcelona: Ediciones Ariel, 1962.
- Chiang, Alpha. Métodos Fundamentales De Economía Matemática. México: McGraw Hill, 1987.
- Dagum, C y Bee de Dagum E. Introducción a La Econometría. México: Editorial Siglo XXI, 1971.
- Fernandez Sainz, A.I - Gonzalez Casimiro, P - Regules Castillo, M - Moral Zuazo, M.P - Esteban Gonzalez, MV. Ejercicios De Econometría McGraw Hill, 2005.
- Goldberger, Arthur S. Teoría Econométrica. Madrid: Editorial Tecnos 1970.
- Gujarati, Damodar. Econometría. México: Mc.Graw Hill, 2004.
- Johnston, J. y Dinardo, J. . Métodos De Econometría. Barcelona: Editorial Vicens Vives, 2001.
- Pulido San Román, Antonio. Modelos Econométricos. Madrid: Editorial Pirámide, 1993.