Capítulo 19. MINIMOS CUADRADOS NO LINEALES

Capítulo 19. MINIMOS CUADRADOS NO LINEALES

Todos los modelos de regresión de una sola ecuación, estudiados hasta este punto, han sido lineales en sus coeficientes y, por tanto, pueden usarse los mínimos cuadrados ordinarios para estimarlos. En la etapa de análisis de la información del proceso de investigación econométrica, , puede que al estimar la relación entre las variables endógenas y exógenas se compruebe que no se cumple con el supuesto de linealidad. En este capítulo se examina el problema de estimar ecuaciones que son no lineales en sus coeficientes. Aunque estos procedimientos para la estimación no lineal pueden ser costosos desde el punto de vista del cálculo, incrementan en gran medida el alcance de las estructuras de modelo que pueden usarse para la estimación del mismo en un espacio y tiempo determinado.

19.1 Prueba de linealidad del modelo

Generalmente, en la práctica se especifica un modelo lineal y luego se contrasta la hipótesis de linealidad. Esta puede ser evaluada a partir de la prueba RESET de Ramsey. Partiendo de que cualquier función puede ser aproximada por polinomios del orden adecuado, en el modelo de regresión se pueden introducir términos con las potencias sucesivas de la variable endógena.

El contraste de Ramsey realiza una prueba para comprobar si los coeficientes de las potencias incluidas en el modelo se anulan; si se confirma esta hipótesis, se acepta la forma funcional lineal del mismo.

Para realizar el contraste RESET se debe decidir cuantas funciones de los valores ajustados se incluirán en la regresión ampliada. No hay una respuesta concreta a esta pregunta, pero los términos al cuadrado y al cubo suelen ser suficientes en la mayoría de los casos.

Sean $\hat{Y}_t$ los valores ajustados por MCO al estimar la ecuación

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

Se considera la ecuación ampliada

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \alpha_2 \hat{Y}^2 + \alpha_3 \hat{Y}^3 + \varepsilon_t$$

Obviamente no hay interés en los valores estimados de esta última ecuación, solo se quiere determinar la existencia de linealidad en el modelo estimado originalmente. Se debe recordar, al respecto, que $\hat{Y}^2, \hat{Y}^3$ son funciones no lineales de las variables exógenas.

La hipótesis nula es la linealidad. Formalmente, Ramsey establece,

$$H_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}); \quad H_1 : \boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{N}(\boldsymbol{\varepsilon}, \sigma^2 \mathbf{I})\ \forall \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$$

El estadístico RESET es una F que, bajo hipótesis nula, tiene $2, T-k-2$ grados de libertad. ¿porqué?. En general, se pueden expresar los grados de libertad en función de la cantidad de regresores que se añaden, pero teniendo en cuenta que se deben dejar los suficientes grados de libertad para la estimación del modelo.

$$F = \frac{(R_n^2 - R_v^2)/k_n}{(1 - R_n^2)/(n - k_n)}$$

El estadístico se construye con los coeficientes de determinación de la ecuación original y la ampliada (R_n^2 y R_v^2, respectivamente) y los grados de libertad tienen en cuenta los parámetros adicionales en la ecuación ampliada.

19.2. Especificación de modelos no lineales

En el proceso de investigación econométrica, a veces hay que responder a la pregunta sobre qué tipo de modelo especificar, ya que la teoría respectiva puede no dar indicios acerca del modelo a aplicar.

Ejemplo 19.1. Para estudiar el crecimiento del empleo se puede utilizar un modelo del tipo:

$$U_t = e^{\alpha}\left(\frac{W_t}{p_t}\right)^{\beta} e^{\mu}$$

donde:

U_t, denota la tasa de crecimiento o destrucción del empleo

$\frac{W_t}{p_t}$, es el salario real

Este modelo es claramente *no lineal* pero puede transformarse en otro lineal mediante un *cambio de variables*, haciendo

$Y_t = \ln U_t$

$X_t = \ln \frac{W_t}{p_t}$

Quedando, $Y_t = \alpha + \beta X_t + \mu$

Esta especificación tiene la ventaja de que el valor del coeficiente β proporciona la elasticidad desempleo - salario real, puesto que:

$$\beta = \frac{dlnU_t}{dlnW_t/p_t} = \frac{W_t/p_t}{U_t} \cdot \frac{dU_t}{d(W_t/p_t)} = \frac{Variac.\%\ en\ U_t}{Variac.\%\ en\ W_t/p_t}$$

Una forma general del modelo de regresión es

$$y_t = g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t \qquad (19.1)$$

El modelo lineal general es un caso especial de (19.1), pero esta especificación incluye también a, por ejemplo,

$$y_t = \beta_1 e^{\beta_2 x_t} + \varepsilon_t \qquad (19.2)$$

Que no tiene una transformación lineal. Este modelo se denomina *intrínsecamente no lineal* ya que no puede transformarse en lineal.

Lo que caracteriza a (19.2) como un modelo de regresión no lineal es el método de estimación de sus parámetros. En general, se verá que los residuos de un modelo no lineal no siguen una distribución normal, por lo que habrá que buscar otros métodos de estimación basados en procesos iterativos. Por lo tanto, un modelo es no lineal cuando no es lineal en los parámetros, no importa si las variables son lineales.

De esta forma, por ejemplo, los modelos

$$Y_t = \beta_1 + (0{,}75 - \beta_1)e^{-\beta_2(X_t - 2)} + \mu_t$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2^3 X_i + \mu_t$$

son *no lineales* porque no hay una manera simple de expresar una relación lineal entre parámetros.

Un modelo especificado como

$$y_t = \beta_1 e^{\beta_2 x_t + \varepsilon_t}$$

Es un modelo *intrínsecamente lineal*, ya que se puede transformar en lineal aplicando logaritmos en ambos miembros de la ecuación.

Entonces, un modelo es lineal en

-parámetros y variables $Y = \alpha_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \mu$

-parámetros $Y = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2 + \mu$

Por lo tanto, los modelos

$$Y_t = e^{\beta_1 + \beta_2 X_t + \mu_t}$$

$$Y_t = \frac{1}{1 + e^{\beta_1 + \beta_2 X_t + \mu_t}}$$

son *intrínsecamente modelos lineales* porque se linealizan de manera simple a partir de la aplicación de logaritmo.

Ejemplo 19.2.

Las siguientes funciones de Cobb-Douglas:

$Y_t = \beta_1 X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3} \mu_t \Rightarrow$ se convierte en lineal al hacer

$$Ln(Y_t) = Ln(\beta_1) + \beta_2 Ln(X_{2t}) + \beta_3 Ln(X_{3t}) + Ln(\mu_t)$$

$Y_t = \beta_1 X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3} + \mu_t \Rightarrow$ no se convierte en lineal porque

$Ln(Y_t) = Ln\left(\beta_1 X_{2t}^{\beta_2} X_{3t}^{\beta_3} + \mu_t\right)$ siendo $L(A+B) \neq \ln A + \ln B$ por lo que este modelo es no lineal.

La función de distribución con elasticidad constante de sustitución (ECS) también es un ejemplo de no lineal

$$Y_t = A\left[\delta K_t^{-\beta} + (1-\delta) L_i^{-\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta}} \mu_t$$

De manera general, se considerarán ecuaciones de la forma

$$y_t = g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t$$

Donde, $g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}) = f(X_2, \dots, X_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ (19.3)

f es una función no lineal de las k-1 variables independientes $X_2,\dots,X_k$ y los k coeficientes $\beta_1,\dots,\beta_k$.

El criterio usado para determinar los valores estimados de los coeficientes es el mismo que se usa en una regresión lineal; es decir, la minimización de la *suma de cuadrados del error.*

Si se tienen *T* observaciones en *Y*, $X_2,\dots, X_k$, se puede escribir la suma de cuadrados del error como:

$$S(\beta) = \sum_{t=1}^{T} \left[y_t - f(X_{2t}, \dots, X_{kt}, \beta_1, \dots, \beta_k) \right]^2 \qquad (19.4)$$

Se denominarán $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$ a las estimaciones de *mínimos cuadrados no lineales* de $\beta_1,\dots,\beta_k$; es decir, los valores que minimizan la suma de cuadrados de *S*.

En el caso de una regresión lineal es sencillo, desde el punto de vista del cálculo, obtener las estimaciones de mínimos cuadrados. Sin embargo, para una ecuación no lineal, hay métodos de cálculo alternativos para encontrar estimaciones de coeficiente que minimicen la suma de cuadrados del error en la ecuación (19.4).

19.3. Estimación por MCNL

En general, un modelo de regresión no lineal es aquel para el cual sus primeras derivadas con respecto a los parámetros son funciones no lineales de éstos.

Si se tiene el modelo:

$$y_t = g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t$$

El estimador de mínimos cuadrados no lineales es aquel que minimiza la suma de cuadrados residuales:

$$S(\beta) = \sum \varepsilon_t^2 = \sum [y_t - g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})]^2 \qquad (19.5)$$

Si ε_t se distribuye normal, entonces el estimador de mínimos cuadrados no lineales coincide con el estimador de máxima verosimilitud.

Las condiciones de primer y segundo orden, necesarias y suficientes para la minimización, respectivamente, vienen dadas por:

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2 \sum [y_t - g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})] \frac{\partial g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \qquad (19.6)$$

$$\frac{\partial^2 S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} = 2 \left\{ \sum \frac{\partial g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} - \sum [y_t - g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})] \frac{\partial^2 g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} \right\} = \mathbf{0} \qquad (19.7)$$

donde la matriz en la ecuación (19.7) debe ser definida positiva.

Ejemplo 19.3. Si se tiene el modelo (19.2), la suma del error cuadrático es $S(\beta) = \sum \left(y_t - \beta_1 e^{\beta_2 X_t} \right)^2$

Para minimizar esta suma

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_1} = 2\sum \left(y_t - \beta_1 e^{\beta_2 X_t}\right) e^{\beta_2 x_t} (-1)$$

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_2} = 2\sum \left(y_t - \beta_1 e^{\beta_2 X_t}\right) \left(\beta_1 e^{\beta_2 x_t} x_t\right)$$

Al igualarlas a 0 y resolverlas simultáneamente se obtiene

$$\sum y_t e^{\beta_2 x_t} = \beta_1 e^{2\beta_2 x_t}$$

$$\sum y_t x_t e^{\beta_2 x_t} = \beta_1 \sum x_t e^{2\beta_2 x_t}$$

Estas ecuaciones no tienen una solución explicita. Para resolverlas se utiliza la expansión de Taylor.

Además, $\boldsymbol{\varepsilon_t = y_t - \beta_1 e^{\beta_2 x_t}}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{g}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{g}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta_2 x_t} \\ \beta_1 x_t e^{\beta_2 x_t} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{t = 1, \dots, T}$$

Por lo tanto, se requiere de algún método iterativo para encontrar $\boldsymbol{\hat{\beta}_1 \ y \ \hat{\beta}_2}$.

El método de estimación de modelos no lineales utiliza mínimos cuadrados no lineales o linealización mediante la *expansión de series de Taylor*.

La ecuación no lineal es linealizada alrededor de algún conjunto inicial de valores de los coeficientes. Luego se aplica mínimos cuadrados ordinarios a esta ecuación lineal, generando un nuevo conjunto de valores de los coeficientes; entonces, se vuelve a aplicar mínimos cuadrados ordinarios para generar nuevos valores de los coeficientes, siendo la ecuación relinealizada alrededor de estos valores. Este proceso iterativo se repite hasta que se alcanza la convergencia; es decir, hasta que los valores de los coeficientes no cambian, de manera considerable, después de cada nueva regresión de mínimos cuadrados ordinarios.

Este enfoque tiene ciertas ventajas, la primera es la eficiencia de cálculo. Si la ecuación que se va a estimar es aproximada en forma cercana por una ecuación lineal, pueden ser necesarias muy pocas iteraciones. Una segunda ventaja es que proporciona un lineamiento claro para hacer pruebas estadísticas que, por lo general, sólo se aplican a la regresión lineal. Dado que se realiza una regresión lineal en cada iteración, pueden usarse pruebas estadísticas estándar (R^2, estadística t, etc.) para evaluar el ajuste de la ecuación linealizada final.

Observación. Se usa el hecho de que cualquier función no lineal puede expresarse como una expansión de series Taylor. Se puede escribir, específicamente, la ecuación (19.3) en una expansión alrededor de un conjunto de valores iniciales $\beta_{10},\dots,\beta_{k0}$ para los coeficientes $\beta_1,\dots,\beta_k$. En este punto no es importante cómo se obtuvieron estos valores iniciales; se supone que representan conjeturas de los valores verdaderos. La ecuación expandida es:

$$Y = f(X_2,\dots,X_k,\beta_{1,0},\dots,\beta_{k,0}) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_i}\right)_0 (\beta_i - \beta_{i,0}) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right)_0 (\beta_i - \beta_{i,0})(\beta_j - \beta_{j,0}) + \dots + \varepsilon$$

Aquí, el subíndice 0 en las derivadas parciales denota que estas derivadas son evaluadas en $\beta_1 = \beta_{1,0}, \ldots, \beta_k = \beta_{k,0}$.

Una aproximación lineal a esta función no lineal es proporcionada por los dos primeros términos de la expansión en series de Taylor. Al eliminar los términos de segundo orden y de orden superior y rescribir la ecuación, se obtiene:

$$Y - f\left(X_2,\ldots,X_k,\beta_{1,0},\ldots\beta_{k,0}\right)+\sum_{i=1}^{k}\beta_{i,0}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_i}\right)_0 = \sum_{i=1}^{k}\beta_i\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_i}\right)_0 + \varepsilon \qquad (19.8)$$

Obsérvese que la ecuación (19.8) tiene la forma de una ecuación de regresión lineal. En el lado izquierdo hay una variable dependiente construida y la parte derecha consiste (además del término del error aditivo) en un conjunto de coeficientes desconocidos ($\beta_1,\ldots,\beta_k$) que multiplican al conjunto de variables independientes construidas. De este modo, los coeficientes pueden estimarse ejecutando una regresión de mínimos cuadrados ordinarios.

Los valores de los coeficientes estimados para $\beta_1,\ldots,\beta_k$, los cuales se denominan $\beta_{1,1},\ldots,\beta_{k,1}$ se usan como un conjunto nuevo de estimaciones iniciales, siendo la ecuación no lineal relinealizada alrededor de estos valores. El resultado es una ecuación de regresión lineal nueva:

$$Y - f\left(X_2,\ldots,X_k,\beta_{1,0},\ldots\beta_{k,0}\right)+\sum_{i=1}^{k}\beta_{i,1}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_i}\right)_1 = \sum_{i=1}^{k}\beta_i\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_i}\right)_1 + \varepsilon$$

A esta ecuación, se le aplica mínimos cuadrados ordinarios obteniéndose un nuevo conjunto de estimaciones de los coeficientes $\beta_{1,1},\ldots,\beta_{k,1}$.

El proceso de relinealización se repite hasta que ocurre la convergencia; es decir, hasta que:

$$\left|\frac{\beta_{i,j+1}-\beta_{i,j}}{\beta_{i,j}}\right| < \delta \qquad i = 1,2,\ldots.,k \qquad (19.9)$$

donde δ es un número pequeño cuya elección depende en parte del costo de cálculo.

No obstante, no existe garantía de que este proceso iterativo sea convergente a la estimación de máxima verosimilitud de los coeficientes. Pero puede, por ejemplo, converger en un mínimo local -en oposición a uno global- de la función de suma de cuadrados de los errores. Una forma de ver si ha ocurrido esto es repetir la estimación, comenzando con un conjunto diferente de conjeturas iniciales para los coeficientes.

El hecho de que el proceso iterativo puede no converger en absoluto es muy importante. Las estimaciones subsecuentes de los coeficientes pueden diferir, y el lado izquierdo de la ecuación (19.9) puede hacerse más grande con cada nueva iteración; es decir, el proceso puede divergir. Si ocurre divergencia, se puede comenzar el proceso otra vez, usando un conjunto nuevo de conjeturas iniciales para los coeficientes. Si el proceso aún no converge, puede ser necesario intentar un método de estimación diferente.

Un método alternativo implica una variación en el método de linealización iterativo. En lugar de usar las estimaciones sucesivas resultantes de cada linealización, las estimaciones son calculadas a partir de:

$$\beta_{i,j+1} = \beta_{i,j} + \alpha(\hat{\beta}_{i,j+1} - \beta_{i,j})$$

Donde, de acuerdo a Marquardt, $\hat{\beta}_{i,j+1}$ es la estimación de mínimos cuadrados de la (j+1)ésima iteración y α es un factor de amortiguamiento ($0<\alpha<1$). El factor de amortiguamiento α puede elegirse para evitar rebasar los límites del mínimo de la función de la suma de cuadrado de los errores. El factor de amortiguamiento también puede usarse para cambiar el paso $\beta_{i,j+1}$-$\beta_{i,j}$ de modo que sus valores se encuentren en algún lugar intermedio indicado por el método de linealización y por el método de descenso de pendiente máxima. Ésta es la base para el método de Marquardt.

Hay otros métodos de estimación no lineal que están disponibles y pueden proporcionar estimaciones convergentes cuando fallan los métodos antes descritos; sin embargo, no hay un método mejor que otro, dado que mientras uno puede converger con más facilidad otro puede implicar menos costo de cálculo. A menudo se usan métodos alternativos como una forma de comprobar que se ha alcanzado el mínimo global de la función de la suma de cuadrados de los errores.

19.4. Evaluación de ecuaciones de regresión no lineal

Las pruebas estadísticas usadas para evaluar el ajuste de una ecuación de regresión lineal no son aplicables en forma directa a una regresión no lineal. Por ejemplo, el estadístico F no puede usarse para la prueba de significación conjunta en el ajuste general de una regresión no lineal, ni pueden usarse los estadísticos t de la manera usual.

Una razón para esto es que se obtiene una estimación *sesgada* de σ_ε^2. Aún si ε está distribuido en forma normal con media 0, los residuos que vienen dados por:

$$e_t = Y_t - f(X_{2t},\dots\dots, X_{kt}, \hat{\beta}_1,\dots,\hat{\beta}_k) \qquad (19.10)$$

no estarán distribuidos en forma normal (ni tendrán media 0). Por tanto, la suma de residuos cuadrados no seguirá una distribución chi cuadrado, los coeficientes estimados no estarán distribuidos en forma normal y las pruebas *t* y *F* estándares no podrán aplicarse.

Sin embargo, las pruebas *t* y *F* se pueden realizar en la regresión lineal que se aplica a la linealización final del proceso iterativo aplicado sobre la *expansión de Taylor*. Esta linealización proporcionará una aproximación razonable a la ecuación no lineal y ajustará los datos. Si no ajusta los datos, habrá duda en el ajuste de la ecuación no lineal en su conjunto.

El software *Eviews,* que realiza estimación no lineal por medio del enfoque de linealización, calcula estadísticos *t* y errores estándares asociados para la última linealización, donde estos errores estándares son estimados en forma consistente.

A diferencia de las pruebas *t* y *F*, R^2 puede aplicarse a una regresión no lineal con su interpretación habitual.

19.5. Test de Hipótesis para restricciones lineales

Para contrastar hipótesis de un conjunto de q restricciones lineales o no lineales, se plantea

$$H_0\colon \boldsymbol{R}_{qxk}\boldsymbol{\beta}_{kx1} = \boldsymbol{r}_{qx1}$$

Ejemplo 19.4. Para el modelo genérico $\boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{g}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon_t}$, se plantea el siguiente par de restricciones no lineales en los parámetros:

$$\boldsymbol{H_0} = \begin{cases} \boldsymbol{\beta_1} + \mathbf{2}\boldsymbol{\beta_2^3} - \boldsymbol{\beta_3} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta_1^2} - \boldsymbol{\beta_2} = \mathbf{1} \end{cases}$$

En este caso se tiene

$$\boldsymbol{R\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta_1} + \mathbf{2}\boldsymbol{\beta_2^3} - \boldsymbol{\beta_3} \\ \boldsymbol{\beta_1^2} - \boldsymbol{\beta_2} \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Se estudiarán cuatro métodos mediante los que se puede contrastar el tipo de hipótesis del ejemplo anterior: test de Wald, test de razón de verosimilitud, test de multiplicador de Lagrange y un test F aproximado. Estos test se aplican igual que en regresión lineal, pero en el caso no lineal son equivalentes sólo asintóticamente.

Test de Wald

El estadístico del Test de Wald, para contrastar restricciones no lineales, se define como

$$W = (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'[Var(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) =$$

$$= (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})' [\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{C}']^{-1} (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \xrightarrow{d} \chi_q^2 \qquad (19.11)$$

Donde:

$\hat{\boldsymbol{V}} = \mathrm{Var}\,(\hat{\boldsymbol{\beta}})$, estimador de mínimos cuadrados no lineales de la varianza asintótica de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

$\left(C = \frac{\partial \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \boldsymbol{\beta}'}\right)_{qxk}$, es una matriz de rango completo y q, el número de restricciones, tiene que ser estrictamente menor que k. Esto es análogo al modelo lineal general, en el que $\boldsymbol{C}$ sería la matriz de coeficientes de las restricciones. Con los datos del ejemplo 19.4,

$$\boldsymbol{C}_{2xk} = \begin{pmatrix} 1 & 6\beta_2^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2\beta_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ el estimador de mínimos cuadrados no lineales no restringido y sea $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ el estimador obtenido cuando se imponen las restricciones. Todos los contrastes estadísticos que se van a considerar en esta sección son iguales asintóticamente y la elección de uno o de otro dependerá del costo de los cálculos.

Es oportuno aclarar que este test de Wald presenta similitudes con el utilizado para restricciones lineales pero no es el mismo test.

Test de Razón de Verosimilitud

Bajo normalidad de los errores, el logaritmo de la función de verosimilitud del modelo no restringido viene dado por:

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \sum_{t=1}^{T} ln\,\mathrm{J}(y_t, \boldsymbol{\theta}) - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}}{2\sigma^2}$$

Donde $\mathrm{J}(y_t, \boldsymbol{\theta}) = \left|\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial y_t}\right| = \frac{\partial h(y_t,\boldsymbol{\theta})}{\partial y_t}$ es el jacobiano de la transformación.

Sea L^* el logaritmo de la función de verosimilitud evaluada en los estimadores restringidos. Entonces se tiene que:

$$-2(\ln L^* - \ln L) \xrightarrow{d} \chi^2_q \qquad (19.12)$$

Si el término del jacobiano no está presente en la función logaritmo de verosimilitud, entonces la función $\ln L$ evaluada en los estimadores de máxima verosimilitud no restringidos se reduce a:

$$\ln L = -\frac{T}{2}\left(1 + \ln(2\pi) + \ln\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{T}\right)\right) = -\frac{T}{2}(1 + \ln(2\pi) + \ln(\hat{\sigma}_{NR}^2))$$

En tanto, $\ln L^* = -\frac{T}{2}\left(1 + \ln(2\pi) + \ln\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_R\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}{T}\right)\right) = -\frac{T}{2}(1 + \ln(2\pi) + \ln(\hat{\sigma}_R^2))$

Con esto, el estadístico de razón de verosimilitud se reduce a

$$T(\ln(\hat{\sigma}_R^2) - \ln(\hat{\sigma}_{NR}^2)) = T\ \ ln\left(\frac{\hat{\sigma}_R^2}{\hat{\sigma}_{NR}^2}\right) \xrightarrow{d} \chi_q^2 \qquad (19.13)$$

Este mismo resultado se puede aplicar al modelo de regresión lineal clásico.

Test de Multiplicador de Lagrange

Sea $\varepsilon_t^* = y_t - g(\mathbf{x}_t, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_R)$

Entonces, $\widetilde{\mathbf{X}}_*'\widetilde{\mathbf{X}}_* = \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial g(\mathbf{x}_t, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_R)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial g(\mathbf{x}_t, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_R)}{\partial \boldsymbol{\beta}'}$

Donde, $\widetilde{\mathbf{X}}$ es la matriz de regresores del modelo no lineal, y $\widetilde{\mathbf{X}}_*$ es la misma matriz calculada en las estimaciones restringidas.

Entonces el estadístico del multiplicador de Lagrange para el modelo de regresión no lineal es,

$$LM = \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime}\widetilde{\mathbf{X}}_*(\widetilde{\mathbf{X}}_*'\widetilde{\mathbf{X}}_*)^{-1}\widetilde{\mathbf{X}}_*'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*} \xrightarrow{d} \chi_q^2 \qquad (19.14)$$

Este estadístico solo necesita de los estimadores restringidos, lo que hace más sencillo su cómputo.

Test F (aproximado)

El análogo no lineal del estadístico F basado en el ajuste de la regresión, es decir la suma de los errores al cuadrado, es

$$F_{q,T-k} = \frac{[S(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) - S(\hat{\boldsymbol{\beta}})]/q}{S(\hat{\boldsymbol{\beta}})/T-k} \qquad (19.15)$$

Donde, $S(\boldsymbol{\beta}) = \sum[y_t - g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\beta})]^2$

La distribución de este estadístico es aproximada, ya que como establece Greene (W. Daniel) "… en el contexto no lineal, ni el denominador ni el numerador siguen exactamente la distribución chi – cuadrado necesaria, por lo que la distribución de F es sólo aproximada. Nótese que este estadístico requiere que se estimen, tanto el modelo restringido como el no restringido". (pp. 423)

Ejemplo 19.5 Extraído de Greene (W.H. Greene)

Considere el modelo de consumo:

$$\boldsymbol{C_t = \alpha + \beta Y_t^{\gamma} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \qquad t = 1, 2, \ldots, T}$$

Donde $\boldsymbol{C}$ representa consumo e $\boldsymbol{Y}$ ingreso agregado. Bajo la hipótesis nula $\boldsymbol{H_0: \gamma = 1}$, el modelo es lineal en los parámetros. Por lo tanto, puede ser estimado mediante mínimos cuadrados ordinarios.

Con cifras anuales de la economía americana para el período 1950-1985 se estiman funciones de consumo agregado que arrojan los resultados de la Tabla.

Parámetro	Modelo Lineal (Restringido)	Error Estándar	Modelo No Lineal (No Restringido)	Error Estándar
α	11.15	9.64	184.97	39.13
β	0.89	0.0058	0.252	0.081
γ	1.00		1.1535	0.039
$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$	12068		8421.95	
R^2	0.9956		0.99899	

Considerando el número de 36 observaciones, T=36; contrastar la hipótesis $\boldsymbol{H_0: \gamma = 1}$ frente a la alternativa $\boldsymbol{H_0: \gamma \neq 1}$, haciendo uso de los cuatro tests vistos anteriormente.

Si $\gamma = 1$, se está en presencia de un modelo lineal.

1. Test de Razón de Verosimilitud

Dado que en este caso la función de verosimilitud no involucra el término del jacobiano, el test de razón de verosimilitud toma la forma en la ecuación (19.13):

$$\boldsymbol{T\left(\ln\left(\hat{\sigma}_R^2\right) - \ln\left(\hat{\sigma}_{NR}^2\right)\right) = T\ \ ln\left(\frac{\hat{\sigma}_R^2}{\hat{\sigma}_{NR}^2}\right) \xrightarrow{d} \chi_q^2}$$

En este caso T=36, q=1, $\hat{\sigma}_R^2 = \frac{12068}{36} = 335{,}22$, $\hat{\sigma}_{NR}^2 = \frac{8421{,}95}{36} = 233{,}94$

Reemplazando en el estadístico

36 [Ln(335.22)-Ln(233.94)]

se tiene que el test de multiplicador de Lagrange toma el valor de 12.95. Este supera al valor crítico $\boldsymbol{\chi^2_{0{,}05;1} = 3{,}84}$.

Por lo tanto, se rechaza $\boldsymbol{H_0: \gamma = 1}$ y se concluye que la especificación lineal no es correcta.

2. Test de Wald

La expresión del Test de Wald es

$$W = \left(\boldsymbol{R\widehat{\beta}} - \boldsymbol{r}\right)'\left[Var\left(\boldsymbol{R\widehat{\beta}} - \boldsymbol{r}\right)\right]^{-1}\left(\boldsymbol{R\widehat{\beta}} - \boldsymbol{r}\right)$$
$$= \left(\boldsymbol{R\widehat{\beta}} - \boldsymbol{r}\right)' [\boldsymbol{C\widehat{V}C'}]^{-1} \left(\boldsymbol{R\widehat{\beta}} - \boldsymbol{r}\right)$$

Donde:

$$R\hat{\beta} - r = \hat{\gamma} - 1 = 1.1535 - 1$$

$$C = \frac{\partial R\hat{\beta}}{\partial \beta'} = \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \gamma} = 1$$

$$\hat{V} = 0.039$$

Realizando los reemplazos

$$\boldsymbol{W} = (1.1535 - 1)\,[1\ 0.039\ 1]^{-\mathbf{1}}\,(1.1535 - 1) = \frac{(\mathbf{1,1535 - 1})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{0,0393^2}} = \mathbf{15,29}$$

Nuevamente, el estadístico calculado supera el valor crítico. Por lo tanto, se rechaza $\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1}$.

3. Multiplicador de Lagrange

En este caso

$$\widetilde{\mathbf{X}}'_{*t} = (\mathbf{1} \quad \boldsymbol{Y_t^\gamma} \quad \boldsymbol{\beta Y_t^\gamma} \ \mathbf{ln}\, \boldsymbol{Y_t})$$

¿Porqué? Dado que $\mathrm{h}(\mathbf{x_i}, \boldsymbol{\beta}) = \alpha + \beta Y_i^{\gamma}$, se tiene que $\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \alpha} = 1$, $\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \beta} = Y_i^{\gamma}$ y $\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \gamma} = \beta Y_i^{\gamma} \ln(Y_i)$. Este último resultado se obtiene haciendo uso de $\frac{\partial Y_i^{\gamma}}{\partial \gamma} = Y_i^{\gamma} \ln(Y_i)$

Por lo tanto, $\widetilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1' \\ \tilde{\mathbf{x}}_2' \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_1^{\gamma} & \beta Y_1^{\gamma} \ln(Y_1) \\ 1 & Y_2^{\gamma} & \beta Y_2^{\gamma} \ln(Y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Y_T^{\gamma} & \beta Y_T^{\gamma} \ln(Y_T) \end{bmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} C_1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Y_1^{\gamma} \\ C_2 - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Y_2^{\gamma} \\ \vdots \\ C_T - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Y_T^{\gamma} \end{bmatrix}$

Para computar el test de multiplicador de Lagrange, se evalúan $\widetilde{\mathbf{X}}$ y $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en los estimadores restringidos. Esto es, en aquellos obtenidos con el modelo lineal:

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{184.97}, \qquad \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0.252} \ \ (\boldsymbol{dado}\ \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1}).$$

Haciendo los cálculos se obtiene:

$$LM = \frac{3547.3}{12068/36} = 10.586$$

Donde:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime} \widetilde{\mathbf{X}}^{*} \left(\widetilde{\mathbf{X}}^{*\prime} \widetilde{\mathbf{X}}^{*}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{X}}^{*\prime} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*} = 3547.3$$

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}}{T} = \frac{12068}{36} = 335.22$$

Nótese que $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}$ es la suma de cuadrados estimados bajo el modelo restringido, esto es, el modelo lineal.

4. Test F

$$F = \frac{(12068 - 8421.95)/1}{8421.95/(36 - 3)} = 14.286$$

El valor crítico $F_{0.95;1,33} = 4.18$ por lo que, al igual que en los tres casos anteriores, se rechaza la hipótesis nula.

19.6. Pronóstico con regresión no lineal

Una vez que se ha estimado una ecuación de regresión no lineal, puede usarse para obtener pronósticos. Un pronóstico estará dado por:

$$\hat{Y}_{T+1} = f\left(X_{2,T+1},\ldots,X_{k,T+1},\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_k\right) \tag{19.16}$$

En el capítulo 15 se observó que, para una regresión lineal, un pronóstico como el expresado en 19.16 es insesgado y tiene el error cuadrático medio mínimo. Sin embargo, no puede hacerse esta afirmación para un pronóstico generado a partir de una regresión no lineal. La razón para esto es que los errores de pronóstico no estarán distribuidos en forma normal con media 0, como lo fue para una ecuación lineal. En el caso no lineal no se puede afirmar que el error de pronóstico es menor que el error generado por un conjunto diferente de estimaciones de los coeficientes.

Además, las fórmulas para el error estándar de pronóstico (es decir, la desviación estándar del error de pronóstico) y los correspondientes intervalos de confianza que se derivaron en el capítulo 15 para el caso lineal no se aplican a la ecuación (19.16). De hecho no hay ninguna fórmula analítica que pueda usarse para calcular en forma directa intervalos de confianza de pronóstico para la ecuación no lineal general.

Se puede realizar un pronóstico Monte Carlo, usando errores distribuidos en forma normal para los coeficientes y el término del error aditivo, pero con los resultados de la regresión lineal de la última iteración con el fin de proporcionar estimaciones para los errores estándares.

Ejemplo 19.6. Considérese la siguiente ecuación de regresión no lineal:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1^{\beta_2} + \varepsilon_t$$

Después de que se ha estimado la ecuación y se ha calculado un pronóstico $\hat{Y}_{T+1}$, se calcula el error estándar de pronóstico como sigue:

1. Se rescribe la ecuación como:

$$Y_t = (\beta_0 + \eta_0) + (\beta_1 + \eta_1) X_t^{\beta_2 + \eta_2} + \varepsilon_t$$

donde se establece que η_0, η_1, η_2 y ε_t son variables aleatorias distribuidas en forma normal con media 0 y desviaciones estándar iguales a los errores estándares calculados a partir de la regresión lineal correspondiente a la última iteración del proceso de estimación.

2. Se generan números aleatorios (de las distribuciones normales apropiadas) para η_0, η_1, η_2 y ε_{T+1} para usarlos para el pronóstico $\hat{Y}_{T+1}$.

3. Se calcula este pronóstico.

4. Se repite el paso 2 unas 100 o 200 veces.

5. Se usa la desviación estándar muestral de la distribución resultante de valores para $\hat{Y}_{T+1}$ como el error estándar del pronóstico. Entonces, este error estándar aproximado del pronóstico puede usarse para calcular intervalos de confianza.

No hay garantía de que este método proporcione una aproximación cercana al error estándar de pronóstico verdadero; sin embargo, al menos proporciona alguna medida de la confianza del pronóstico.

Ejemplo 19.7. Función de Consumo

En este ejemplo se estima una función de consumo que es no lineal en los coeficientes. El objetivo es relacionar el consumo real agregado (dólar constante) $\boldsymbol{C}$ con el ingreso disponible real agregado $\boldsymbol{YD}$ en Estados Unidos, usando datos de series de tiempo trimestrales. También se quiere probar la hipótesis de que la propensión marginal a consumir ($\boldsymbol{MPC}$, marginal propensity to consume), definida como:

$$MPC = \frac{dC}{dYD}$$

declina conforme se incrementa el ingreso disponible. Esta hipótesis es fácil de apoyar con el uso de datos de corte transversal (ejecutando la regresión del consumo contra el ingreso para grupos con niveles diferentes de ingreso), pero no usando datos de series de tiempo.

De manera típica, se estima la función de consumo lineal en los parámetros:

$$C = \alpha_0 + \alpha_1 YD + \alpha_2 YD^2 + \varepsilon$$

Se espera que α_1 sea positiva. Si se estima la ecuación usando datos de corte transversal, por lo general, resultará un valor significativo y negativo de α_2; mientras que si se usan los datos de serie de tiempo, la estimación de α_2 puede ser positiva.

Como alternativa, se estima la función de consumo no lineal:

$$C = \alpha_0 + \alpha_1 YD^{\alpha_2} + \varepsilon$$

Los datos de series de tiempo trimestrales que se están usando abarcan el período 1947-1 a 1995-3, la estimación se realiza mediante el proceso de linealización iterativa. Se usa el valor 1.0 como una conjetura inicial para los tres coeficientes (se espera que α_1 y α_2 estén cerca de este valor, pero no hay expectativa respecto al valor de α_0).

La convergencia ocurre después de 22 iteraciones. La ecuación no lineal estimada es:

$$\hat{C} = 256.33 + 0.195 YD^{1.180}$$

Los errores estándares para $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\alpha}_2$ son 16.71, 0.0211 y 0.0126, respectivamente. Como resultado, cada una de las estimaciones de coeficiente es altamente significativa en el nivel del 5%. Además, R^2 es igual a 0.999.

Por comparación, también se estimó la siguiente regresión lineal (los errores estándares están entre paréntesis):

$$\hat{C} = \underset{(7.031)}{-14.925} + \underset{(0.0030)}{0.918}\, YD$$

$$R^2 = 0.998 \qquad s = 39.23$$

Nótese que la $\boldsymbol{MPC}$ para la ecuación lineal es una constante, 0.918; sin embargo, la $\boldsymbol{MPC}$ es para la ecuación no lineal

$$MPC = \frac{dC}{dYD} = \alpha_1 \alpha_2 YD^{\alpha_2 - 1}$$

El valor medio de $\boldsymbol{YD}$ es 2165 y en este valor $\boldsymbol{MPC}$ es 0.917. Obsérvese que $\boldsymbol{MPC}$ declina conforme se incrementa $\boldsymbol{YD}$; para $\boldsymbol{YD}$ igual a 600, $\boldsymbol{MPC}$ es 0.805.

CASOS DE ESTUDIO, PREGUNTAS Y PROBLEMAS

Problema 19.1:

Trabajar con la tabla 19.1 y estimar $Y = \beta_1 \exp^{\beta_2 X} + \mu$

En Eviews, en primer lugar, se debe generar la serie $\mathrm{e} = \exp(1)$

Luego, desde Quick_estimate equation ingresar la ecuación

$\mathrm{Y} = \mathrm{c}(1) * \mathrm{e}^\wedge(\mathrm{c}(2) * \mathrm{X})$

Table 19.1. Management Fee Schedule of a Mutual Fund

Y Fee (%)	X Netasset value ($, billions)
0,52	0,5
0,508	5
0,484	10
0,46	15
0,44	20
0,424	25
0,412	30
0,402	35
0,394	40
0,388	45
0,383	55
0,374	60

Fuente: Gujarati (C. Perez Lopez)

En Method seleccionar LS least square (NLS and ARMA) [NSL significa no lineal].

El resultado de la estimación es:

$$\hat{Y} = 0{,}50e^{-0{,}006X}$$

Los valores de t y F sólo son válidos para muestras grandes, son resultados asintóticos.

El cambio marginal en Y cuando cambia X es

$$\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dX}} = \frac{\mathrm{d}\left(\beta_1 \exp^{\beta_2 \mathrm{X}}\right)}{\mathrm{dX}} = \beta_1 \beta_2 \exp^{\beta_2 \mathrm{X}} = 0{,}5089(-0{,}005965)\exp^{-0{,}005965\mathrm{X}}$$

la tasa de cambio depende del valor particular de X

$\mathrm{X} =$ valor de activos en millones de dólares

$Y =$ comisión en %

Es necesario analizar todos los supuestos del MCO cuya solución no se expone en Gujarati.

Problema 19.2:

La tabla 19.2 que contiene datos de población de los Estados Unidos (en millones de personas) entre 1970 y 1999.

Considerar los modelos de crecimiento

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \mu_t$$

$$\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \mu_t$$

$$Y_t = \frac{\beta_1}{1 + \beta_2 e^{-\beta_2 t}} + \mu_t$$ Crecimiento logístico

$$Y_t = \beta_1 e^{-\beta_2 e^{-\beta_3 t}} + \mu_t$$ Crecimiento Gompetz

La variable USpop es la población en EE.UU y time es una variable que indica tiempo

Table 19.2

USPOP	TIME
205.052	1
207.661	2
209.896	3
211.909	4
213.854	5
215.973	6
218.035	7
220.239	8
222.585	9
225.055	10
227.726	11
229.966	12
232.188	13
234.307	14
236.348	15
238.466	16
240.651	17
242.804	18
245.021	19
247.342	20
249.948	21
252.639	22
255.374	23
258.083	24
260.599	25
263.044	26
265.463	27
268.008	28
270.561	29
273.131	30

Fuente: Gujarati (C. Perez Lopez)

Para el modelo (a.)

En Quick_Estimate equation ingresar la ecuación

$$\text{USpop} = \text{c}(1) + \text{c}(2) * \text{time}$$

El resultado de la estimación es

$$\hat{USpop} = 205972{,}7 + 2328{,}485\text{time}$$

Esta estimación es lineal por lo que corresponde que se cumplan todos los supuestos.

Para el modelo (b.)

En Quick_Estimate equation ingresar la ecuación

$$@log(USpop) = c(1) + c(2) * time$$

En Eviews hay dos caminos para transformar una variable:

1. generar una nueva variable a partir del comando GENR;

2. introducir la función de transformación en la estimación. En este caso `@log´ equivale a generar la serie logaritmo natural de USpop.

La estimación responde al modelo

$$Y = e^{\beta_1 + \beta_2 t + \mu}$$

$$\ln Y = (\beta_1 + \beta_2 t + \mu)\ln e$$

Siendo el resultado:

$$USpop = e^{12{,}2248 + 0{,}0098\text{time}}$$

Para el modelo (c.)

Desde Quick_Estimate equation ingresar la ecuación

$$USpop = [c(1)/(1 + c(2)*(@\exp(-c(3)*time)))]$$

Observar que el modelo tiene 2 variables y 3 incógnitas; el resultado de la estimación es

$$USpop = \frac{238766{,}4}{1 - 217224{,}1 \cdot e^{7{,}877 time}}$$

Para el modelo (d.)

Desde Quick_Estimate equation ingresar la ecuación

$$USpop = c(1)*(@ \exp(-c(2)(@ \exp(-c(3)*time))))$$

Se observa que aquí el coeficiente no es único.

Problema 19.3

La tabla 19.3 tiene información para la economía mexicana entre los años 1955 y 1974.

Se pide especificar y estimar, para comparar, los modelos

a. $Y_t = \beta_1 X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3} e^{u_i}$

b. $Y_t = \beta_1 X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3} + \mu$

Donde, el primero se puede linealizar mientras que el segundo no.

Tabla 19.3

YEAR	GDP	LABOR	CAPITAL
1955	114043	8310	182113
1956	120410	8529	193749
1957	129187	8738	205192
1958	134705	8952	215130
1959	139960	9171	225021
1960	150511	9569	237026
1961	157897	9527	248897
1962	165286	9662	260661
1963	178491	10334	275466
1964	199457	10981	295378
1965	212323	11746	315715
1966	226977	11521	337642
1967	241194	11540	363599
1968	260881	12066	391847
1969	277498	12297	422382
1970	296530	12955	455049
1971	306712	13338	484677
1972	329030	13738	520553
1973	354057	15924	561531
1974	374977	14154	609825

Fuente: Gujarati

Modelo (a.). El primer modelo se linealiza:

$$ln Y = ln \beta_1 + \beta_2 ln X_2 + \beta_3 ln X_3 + u_i ln e$$

En Eviews se trabaja desde *Quick_Estimate equation* de la manera habitual, teniendo en cuenta que

$ln = @log(\ )$

$X_2 =$ capital

$X_3 =$ labor

$\ln \beta_1 = -1{,}65$

$e^{\ln \beta_1} = e^{-1{,}65} = \beta_1$

El resultado de la estimación es:

$$gdp = e^{-1{,}65}\ Capital^{0{,}8459}\ Labor^{0{,}3397}$$

Modelo (b.). Nuevamente se trabaja en Eviews desde *Quick_Estimate equation*, pero ahora ingresando la ecuación

$$GDP = c(1) * (Capital \wedge c(2)) * (Labor \wedge c(3))$$

El resultado de la estimación es

$$\hat{GDP} = 0{,}529\ Capital^{0{,}88}\ Labor^{0{,}18}$$

EJERCICIOS

1 Expanda la función de consumo

$$C = a_1 + a_2 YD^{a_3}$$

en una expansión de serie de Taylor alrededor de alguna conjetura inicial para a_0, a_1 y a_2. Establezca la ecuación de regresión lineal. Explique cómo sería relinealizada la ecuación alrededor de las estimaciones mínimo cuadráticas ordinarias a partir de la primera regresión.

2. Escriba la función de suma de cuadrados de los errores S para la función de consumo no lineal

$$C = a_0 + a_1 YD^{a_2}$$

Tome las derivadas de S con respecto a a_0, a_1 y a_2 para obtener las ecuaciones normales. Describa cómo podrían resolverse estas ecuaciones normales para producir estimaciones de a_0, a_1 y a_2.

Bibliografía

- Amemiya, T. "Nonlinear Regresión Models," Handbook of Econometrics De Z. Griliches Y M. Intiligator. Ámsterdam
- Fernandez, Viviana. "Apuntes De Teoría Econométrica I," http://www.oocities.org/vivipauf/pag1.htm, Mínimos Cuadrados no Lineales. Santiago: Pontificia Universidad Católica de Chile, 2012.
- Greene, W.H. Análisis Econométrico. Madrid: Pearson Educación, S. A., 1999.
- Gujarati, Damodar. Econometría. México: Mc.Graw Hill, 2004.
- Marquardt, D.W. "An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters." Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, 1963, 2, pp. 431.